Spectral graph theory を用いた 格子 Dirac 演算子の新たな解析法

湯本 純 [1]，三角樹弘 [2]

[1] 秋田大学理工学研究科 理論物理学研究室 [2] 近畿大学

August 6, 2021

Background: ダブリング問題と no-go 定理

格子上の場の理論には ダブリング問題 と呼ばれる難問が存在する。

ダブリング問題

chiral charge の正と負が対となっている格子 fermion が複数出現する。

4 dimensional naive fermion では，16 個も出現する。

以降，これら複数の fermion を doubler と呼ぶ。

この問題を定理として厳密に定式化したものが
「Nielsen-Ninomiya's no-go theorem」

この問題を回避するための方法として以下があるが，デメリットも存在する。

Wilson fermion (chirality を破る)	$\longrightarrow$	mass parameter の調整
domain-wall fermion (locality を破る)	$\longrightarrow$	高い計算コスト

現在でもダブリング問題を回避する新たな手法が模索されている。

これまでの doubler に関する研究で以下が判明した。

- doubler の数は，離散化された時空 (多様体) に依存

  Ex. d 次元球体 B^d: 最大 1 個　　2 次元球面 S^2: 最大 2 個

- no-go 定理は，周期的境界条件を課した格子にのみ適用可能

これらの結果から次のことが言える。

- doubler 数の詳細を与える幾何学的定理が存在
- ある格子離散化された多様体上では
  最小の doubler 数を持つ新たな格子作用を構成することが可能

任意の doubler 数を持つ格子作用を構成するために

no-go 定理を包含し且つ doubler 数の詳細を与える
新たな定理の構成が必要不可欠

新しい定理を構成するために position space における格子作用に注目する。

$$S = \sum_{m,n} \bar{\psi}_m \mathcal{D}_{mn} \psi_n \quad (1)$$

$\bar{\psi}, \psi$ は fermi 場を表す。m, n は正方格子上の格子点を表す整数の組 $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ とする。

position space において

格子 Dirac 演算子は，$\mathcal{D}_{mn}$ を m, n 成分として持つ行列とみなせる。

行列 $\mathcal{D}$ の **Dirac** ゼロ固有状態が Dirac fermion の励起状態となる。

行列 $\mathcal{D}$ のゼロ固有値を調べることで
doubler の個数を調べることが可能となる。

doubler の個数は，よく知られている線形空間の議論 (固有値問題) に帰着される。

今回の発表では,
任意の格子離散化された多様体上の doubler 数を調べるために

spectral graph theory (SGT) から着想を得た
格子 fermion の新たな解析方法を紹介していく。

Table of Contents