量子論の非局所性と Bell-CHSH不等式

秋田大学大学院理工学研究科数理科学コース
理論物理学研究室三角グループ
博士前期課程1年　逢坂尚人

概要

- 古典論で満たされるBell-CHSH不等式は量子論では一般に破れ，その破れは量子論の非局所性を示すことが知られている．近年，量子情報の研究が進む中でその重要性が増している．ここではBell-CHSH不等式とその破れを復習した上で，この不等式が最大でどこまで破れ得るのかを調べ，量子論の非局所性を考察する．

ベルの不等式

$$P(\hat{a}+;\hat{b}+) \leq P(\hat{a}+;\hat{c}+) + P(\hat{c}+;\hat{b}+)$$

EPR対となっている粒子対を考える。

古典論では2つの粒子が持つスピン方向a,b,cを考えたとき、ベルの不等式が成り立っていた。

それに対し量子論ではベルの不等式が成り立たないので、量子論の非局所性を示してくれる。[1],[2]

古典論でのベルの不等式

古典論ではスピンの不確定性が無いため、右の表のようにスピンの方向を同時に確定している状態でEPR対を考えることが出来た。

局所モデルでのスピン成分の組み合わせ

型	分布	粒子 1	粒子 2
1 型	N_1	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$
2 型	N_2	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$
3 型	N_3	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$
4 型	N_4	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$
5 型	N_5	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$
6 型	N_6	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$
7 型	N_7	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$
8 型	N_8	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$

量子論でのベルの不等式

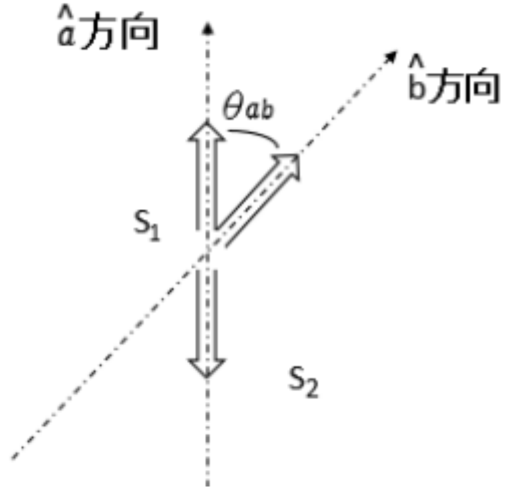
量子論ではスピン方向の不確定性が存在するため、a,b,cのスピン方向を同時に決定することが出来ない。

なので、計算するためにスピン歳差運動を考える。

計算した結果、 $P(\hat{a}+;\hat{b}+) = \left(\frac{1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right)$

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right) \leq \sin^2\left(\frac{\theta_{ac}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_{cb}}{2}\right)$$ となり

$\theta_{ab} = 2\theta, \theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta$ とすると $\theta = \frac{\pi}{4}$ では破れている。



CHSH不等式(測定に適したベルの不等式)

EPR対を考えたときにスピン方向を測定する際に2つの粒子それぞれに対し、観測器をa,bだけ傾けて観測する。

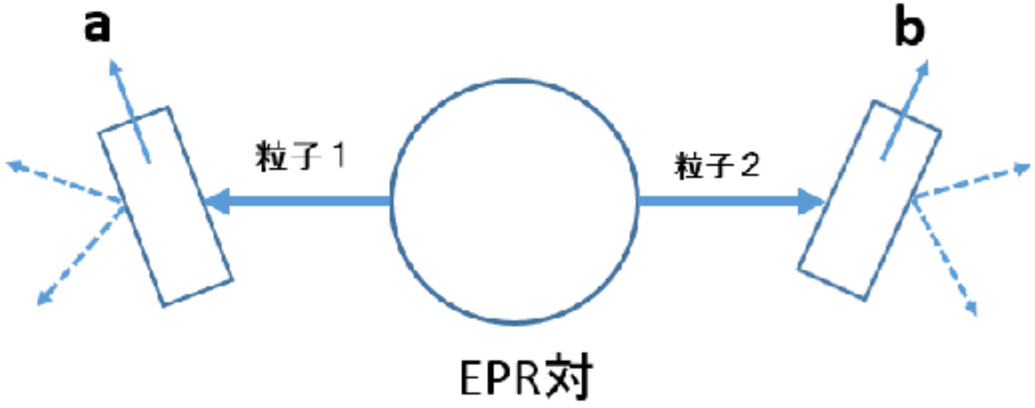
このときの相関は

$E_{HV}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \equiv \int A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$ となる。

さらに測定器をa′,b′だけ傾けて観測した結果から相関の関係性を見ると

$$S_{HV}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')| + |E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}') + E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})| \leq 2$$

がわかる。これがCHSH不等式である。[3]



CHSH不等式証明

$$
\begin{aligned}
&|E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b'})| \\
= &\left| \int A(\boldsymbol{a})B(\boldsymbol{b})(1 \pm A(\boldsymbol{a'})B(\boldsymbol{b'}))\rho(\lambda)d\lambda \right. \\
&\quad \left. - \int A(\boldsymbol{a})B(\boldsymbol{b'})(1 \pm A(\boldsymbol{a'})B(\boldsymbol{b}))\rho(\lambda)d\lambda \right|
\end{aligned}
$$

$|a-b| \leq |a| + |b|$, $|AB| \leq 1$, $|1 \pm AB| = 1 \pm AB$

$$
\begin{aligned}
\leq &\int |A(\boldsymbol{a})B(\boldsymbol{b})|(1 \pm A(\boldsymbol{a'})B(\boldsymbol{b'}))\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad + \int |A(\boldsymbol{a})B(\boldsymbol{b'})|(1 \pm A(\boldsymbol{a'})B(\boldsymbol{b}))\rho(\lambda)d\lambda
\end{aligned}
$$

CHSH不等式証明

$$|E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')|$$
$$\leq \int(1\pm A(\boldsymbol{a}')B(\boldsymbol{b}'))\rho(\lambda)d\lambda+\int(1\pm A(\boldsymbol{a}')B(\boldsymbol{b}))\rho(\lambda)d\lambda$$
$$=2\pm(E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')+E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}))$$
$$|E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')|\pm(E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')+E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}))$$
$$\leq|E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')|+|E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')+E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})|\leq 2$$

$$S_{HV}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')|+|E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')+E(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})|\leq 2$$

CHSH不等式が示された！

量子論におけるCHSH不等式の破れ

全スピン $\boldsymbol{S} = 0$ となっているEPR対の状態を考える

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2)$$

粒子1,粒子2それぞれに対してのスピン演算子を $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ とする

$$\boldsymbol{S} |\psi\rangle_{12} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma_1} + \boldsymbol{\sigma_2}) |\psi\rangle_{12} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\sigma_1} |\psi\rangle_{12} = -\boldsymbol{\sigma_2} |\psi\rangle_{12}$$

このときの相関は

$$E_{QM}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \langle\psi|(\boldsymbol{\sigma_1} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma_2} \cdot \boldsymbol{b})|\psi\rangle_{12}$$

$$\Rightarrow \quad E_{QM}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\langle\psi|(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \underbrace{i(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma_1}}_{=0}|\psi\rangle_{12}$$

量子論におけるCHSH不等式の破れ

ここで $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の間の角度を ϕ とすると

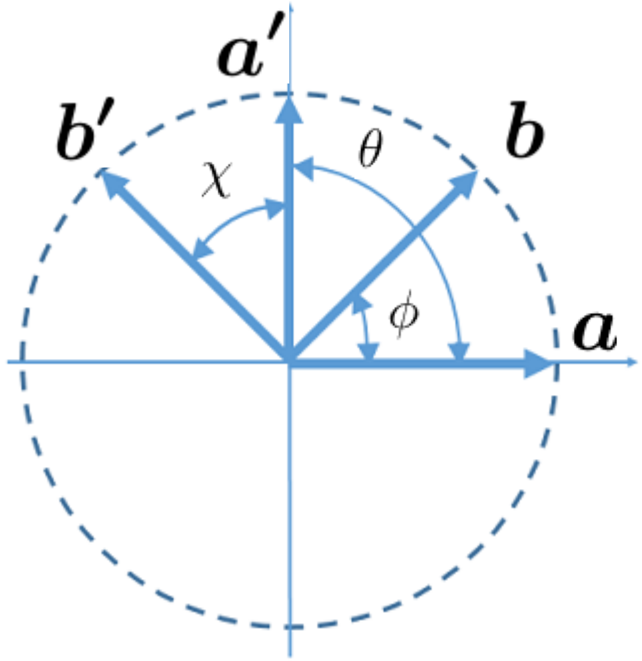
$$E_{QM}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -_{12}\langle\psi|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})|\psi\rangle_{12} = -\cos\phi$$

同様に $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ と $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ の角度をそれぞれ θ , χ とすると

$$S_{QM} = |\cos\phi - \cos(\theta+\chi)| + |\cos\chi + \cos(\theta-\phi)|$$

$\phi = \chi = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ では

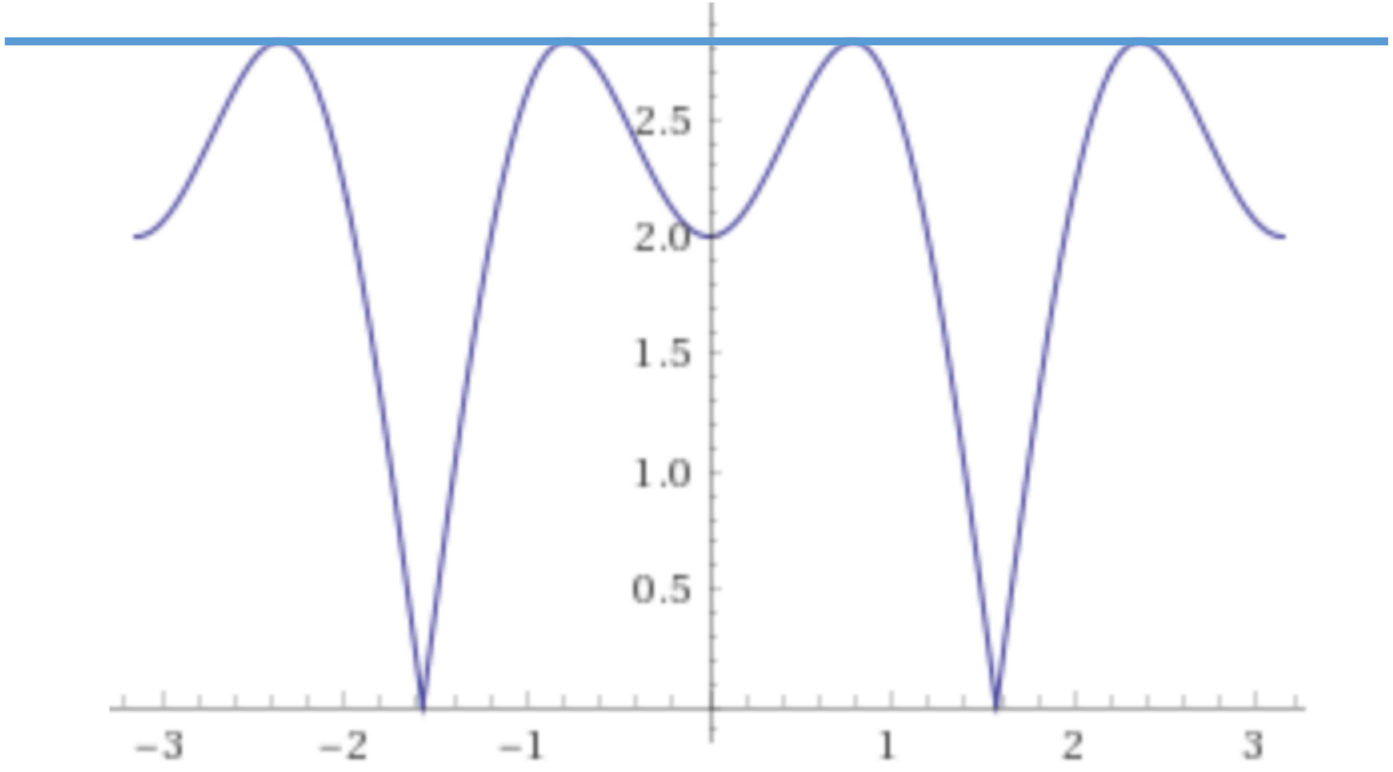
$$S_{QM} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} > 2$$



非局所性が示された！

CHSH不等式の非局所性の最大値は？

$\phi = \chi = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ では



破れの最大は $2\sqrt{2}$

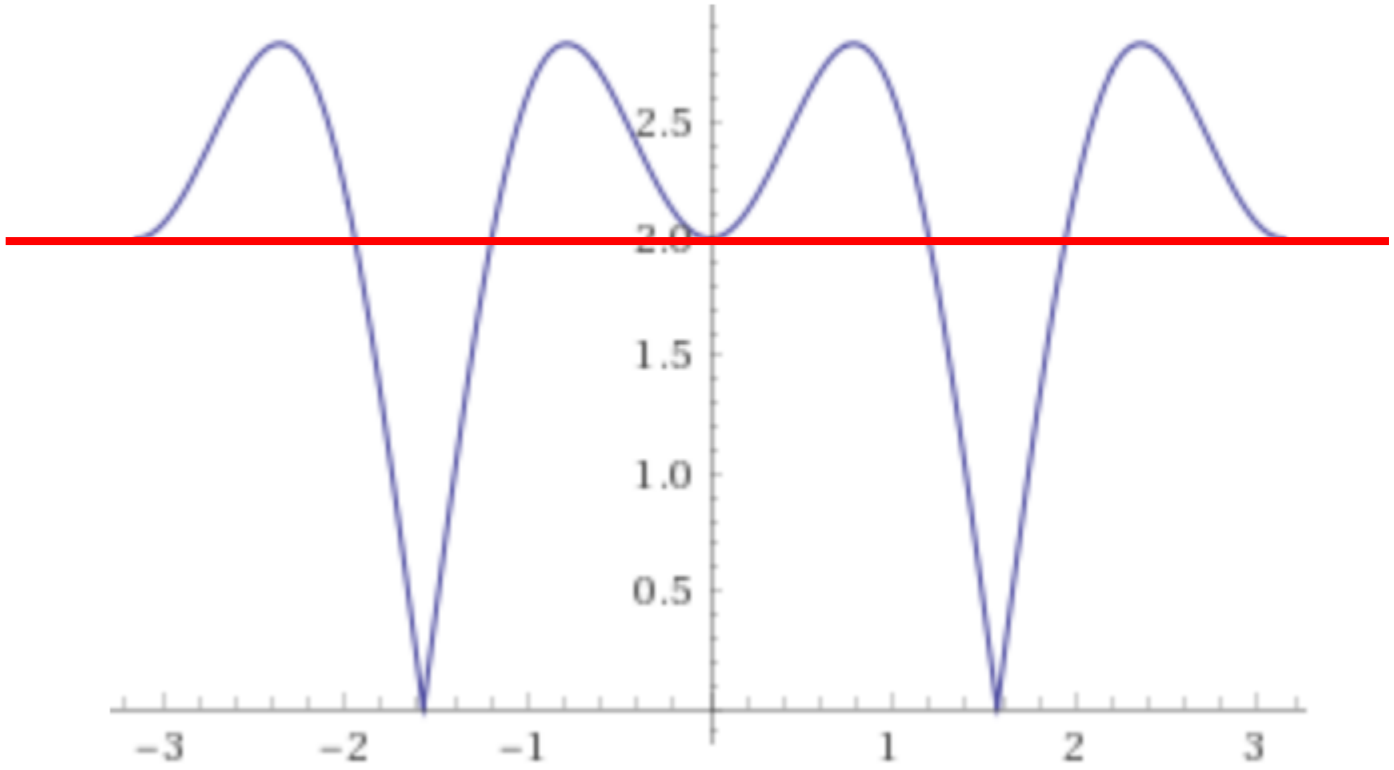
破れの範囲は？

$-\pi \leq \phi \leq \pi$ では

$$0 < \phi \leq 68.52^\circ$$

$$111.48^\circ \leq \phi < \pi$$

CHSH不等式の破れの範囲を最大化する状況、またはそれに関する定理を考察していく



Tsirelson bound

CHSH不等式の破れの最大値は $2\sqrt{2}$ であり、この最大値は”Tsirelson bound”と呼ばれている。[4],[5]

仮に破れがこの上限を超えてしまうとEPR対の情報の因果関係(causality)に問題が生じる

量子情報通信理論における制限になっている

参考文献

- [1].J.J.Sakurai,Jim Napolitano,桜井昭夫,現代の量子力学（上）
- [2]. Bell, J. S. *Physics* **1964**, *1*, 195(1964)
- [3].佐川弘幸,吉田宣章,量子情報理論
- [4].Jeffrey Bub, Probability in Physics pp 167-185 ,Why the Tsirelson bound?
- [5]. B. S. Cirel'son, *Quantum Generalizations of Bell's Inequality*, Lett. Math. Phys. 4, 93 (1980)