AdS時空とバルク境界対応の物理

秋田大学大学院理工学研究科数理科学コース
理論物理学研究室三角グループ
博士前期課程1年　小原賢

目次

アブストラクト

- タイトル：AdS時空とバルク境界対応の物理
- 概要：AdS/CFT対応に代表される古典量子対応を考える上で、時空構造とその境界での物理が重要な役割を担っている。ここでは、AdS時空の時空構造とその境界条件について調べることで、他の理論との対応関係の数理を示す。特に(2+1)次元重力理論に注目し、Chern-Simons理論との等価性から、量子系の理論との対応について考察する。また、Ryu-Takayanagi公式の提唱に端を発する重力理論と量子情報理論の関わりにも言及する。

一般相対論の基礎事項

計量テンソル:$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab}\theta^a\theta^b$

$\eta_{\mu\nu} = diag(-+ + \cdots +)$

四脚場形式

自然単位系:$c = \hbar = 1$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\theta^a_\mu\theta^b_\nu \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b$$

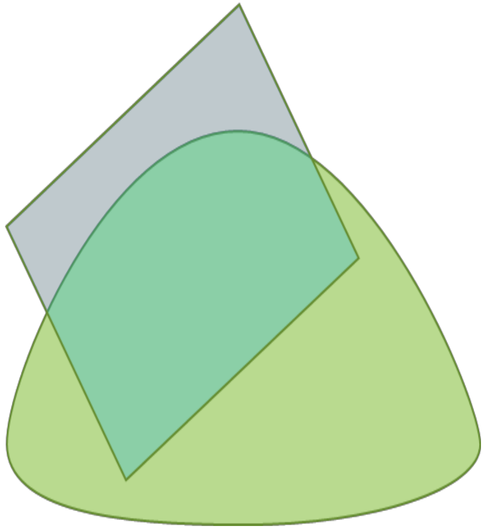
四脚場の共変微分

$$\nabla_\nu\theta^a_\mu \equiv \partial_\nu\theta^a_\nu + \omega_\nu{}^a{}_b\theta^b_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\theta^a_\lambda$$

スピン接続:$\omega_\nu{}^a{}_b$

曲率テンソルの微分形式表示

$$\mathfrak{R}^a_b = \frac{1}{2}R^a_{b,\rho\sigma}dx^\rho \wedge dx^\sigma$$



Anti-de Sitter(AdS)時空

- ここでは、AdS_3で考える
- 　計量を

$$ds^2 = -(dU^{-1})^2 - (dV)^2 + (dX)^2 + (dY)^2$$

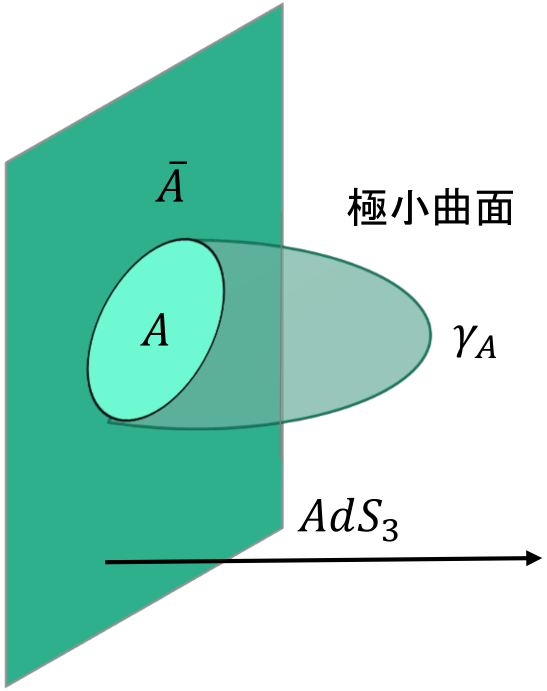
- Global AdS座標

$$ds^2 = l^2(-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega^2)$$

- Poincare’座標

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2}(dz^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)$$

共形Killing方程式



平坦な時空の線素: $ds^2 = \mu_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$

に対し、無限小座標変換: $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ を考えると

$$ds'^2 = ds^2 + (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) dx^\mu \, dx^\nu$$

曲がった時空では $ds'^2 = ds^2 + \left(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu\right) dx^\mu \, dx^\nu$

Z(動径方向) $= 0$ での等長変換($ds'^2 = ds^2$)では

$$\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i = 2\zeta \eta_{ij}$$

バルクの境界で共形場理論(Virasoro代数)が誘導

3次元重力理論からChern-Simons理論への変換

(2+1)次元重力理論を考察

Einstein-Hilbert作用

$$I = \frac{1}{2\kappa}\int dx^3 \sqrt{g}\,(R + \frac{2}{l^2})$$

微分形式より:$\mathfrak{R}^{ab} = \frac{1}{2} R^{ab}_{\ \ \mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$

四脚場形式より:$\theta \epsilon_{\mu\nu\lambda} dx^{\nu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\lambda} = \epsilon_{abc} \theta^{a} \wedge \theta^{b} \wedge \theta^{c}$

$$I = \frac{1}{2\kappa}\int \epsilon_{abc}\ (\mathfrak{R}^{ab} + \frac{1}{3l^2}\theta^{a} \wedge \theta^{b}) \wedge \theta^{\ c}$$

新しい場 : $A^a = \omega^a + \frac{i}{l}\theta^a, \bar{A} = \omega^a - \frac{i}{l}\theta^a$

SU(2)の生成子 : $J_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

よりゲージ場

$$\mathrm{A} = \mathrm{A^a J_a}\ \bar{A} = \bar{A}^a J_a$$ と定義

この場を用いるとChern−Simons作用

$$I = \frac{k}{4\pi}\int Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

この時、$\kappa = 8\pi G$より k$= -\frac{l}{4G}$ となる。

Chern-Simons理論の境界自由度

Chern-Simons作用:　$\mu, \nu, \lambda = 0,1,2$

(1 + 1)次元的境界項Bが表れる

$$\mathrm{I} = \frac{k}{4\pi}\int d^3x\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda$$

$$= \frac{k}{4\pi}\int d^3x\epsilon^{oij}\{-A_i\dot{A}_j + A_0\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) + \partial_j(A_0 A_i)\}$$

→条件$A_0 = 0$を課す

$A_i = \partial_i\phi$ と置く

$$\mathrm{I} = \frac{k}{4\pi}\int d^3x\epsilon^{oij}A_i\dot{A}_j = \frac{k}{4\pi}\int dtdx\partial_0\phi\partial_1\phi$$

→ゲージ固定条件からゲージ不変性を回復

Chern-Simons理論（３次元）がWZW理論 (CFT_2,ゲージ理論）と等価

ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー

笠-高柳の公式

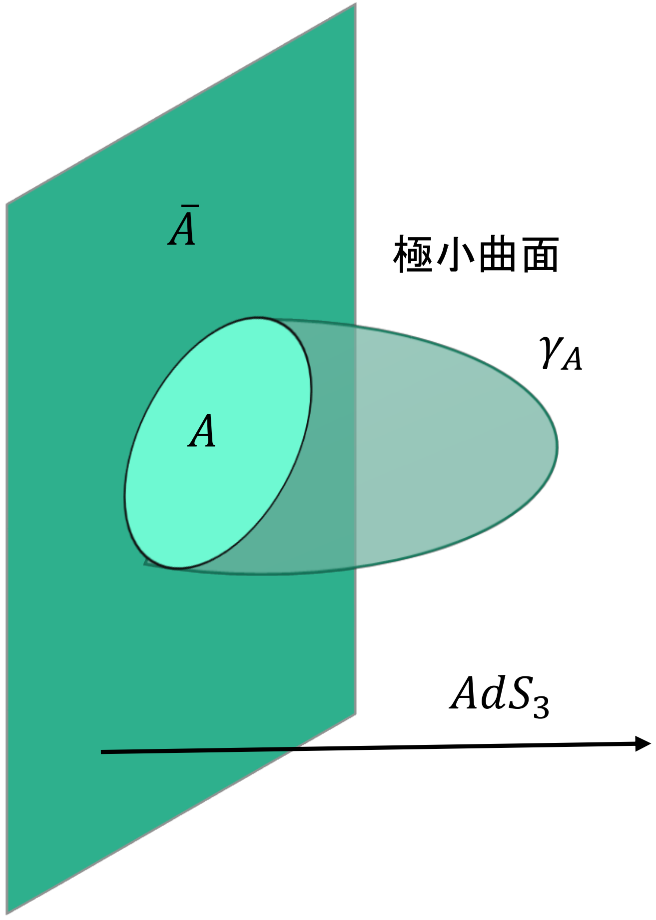
$$S = \frac{Area(\gamma_A)}{4G}$$

γ_A:境界がAの境界と一致するAdS_3の極小曲面

Bekenstein-Hawkingの法則:　$S = \frac{A}{4G}$

→$Area(\gamma_A)$をBHのホライズン面積と類推

AdS_3とCFT_2がHEEで対応



参考文献

1. M Ba˜nados,“Global charges in Chern-Simons theory and the 2+1 black hole”Hep-th/940517v2(1995)
2. Edward Witten,” ANTI DE SITTER SPACE AND HOLOGRAPHY”,arXiv:hep-th/9802150v2(1998)
3. S Ryu and T Takayanagi,”Holograhic Derivation of Entanglement Entropy from the anti–de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence”, Phys. Rev. Lett. 96, 181602(2006)
4. N Iizuka,A Tanaka,and S Terashima,” Exact Path Integral for 3D Quantum Gravity”,arXiv:1504.05991v3(2015)
5. 山口哲､「超弦理論における､AdS空間の超重力理論と境界の共形場理論の対応について」､(1999)
6. 藤井保憲､「超重力理論入門」､産業図書株式会社(2005)
7. 松枝宏明､「量子系のエンタングルメントと幾何学-ホログラフィー原理に基づく異分野横断の数理-」､森北出版株式会社(2016)