真空エネルギーの観点に基づくカシミール効果の再考察

秋田大学大学院理工学研究科数理科学コース
理論物理学研究室三角グループ
博士前期課程1年
塚本尚輝

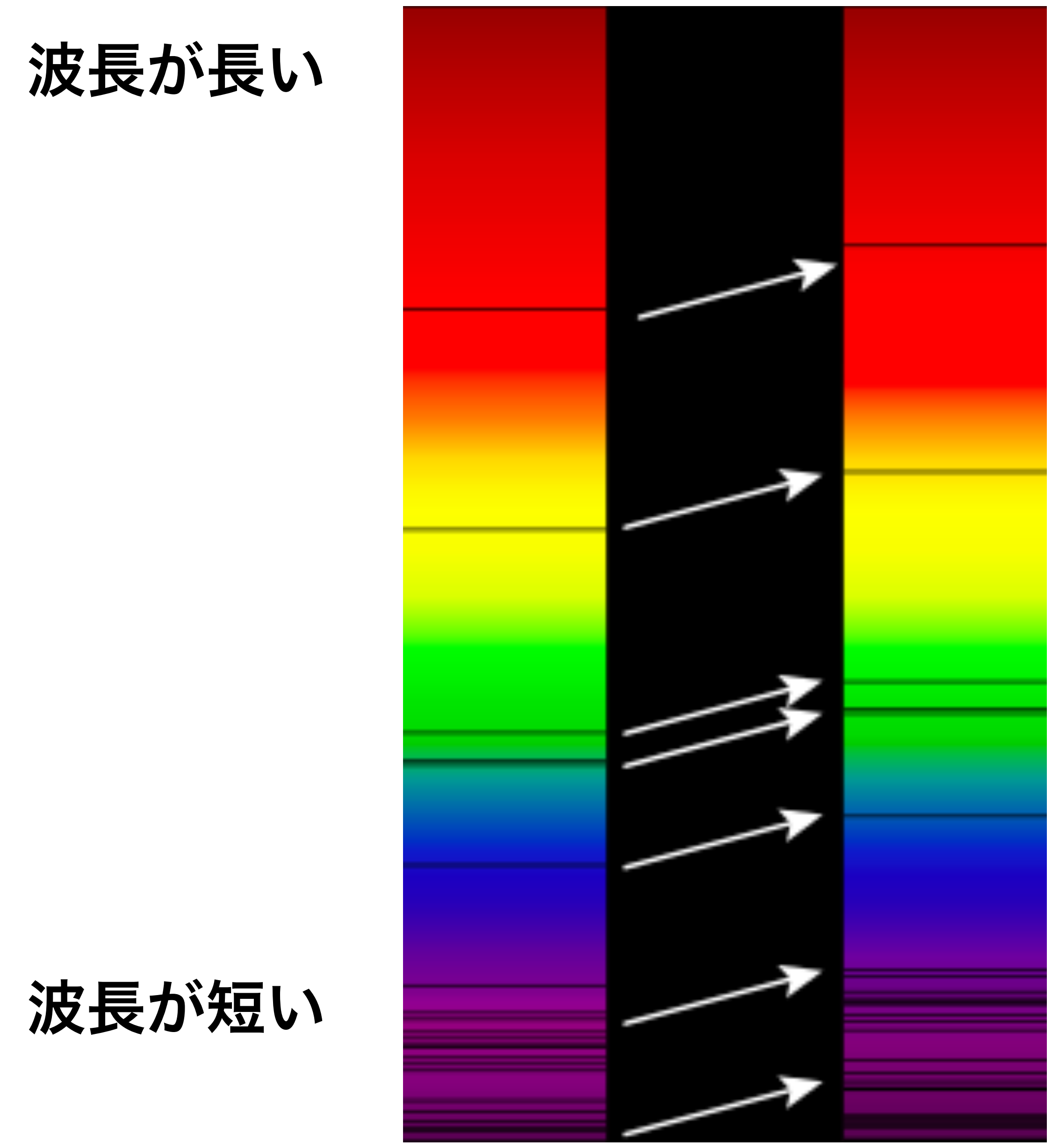
概要

宇宙膨張の原因である暗黒エネルギーの解明には，真空のエネルギーの理解が不可欠である．一方，真空のエネルギーが関わる自然現象の一つとしてカシミール効果がある．ここでは，無限大の真空エネルギーから如何にして観測可能な効果が生じるかについて，その数理的側面にも注目しながら再考する．また，近年注目されている重力子に起因するカシミール効果の研究についても言及する．

導入：膨張宇宙と真空エネルギー

- 光の波長を観測すると遠い恒星ほど長い波長が観測される.
- これは，宇宙の膨張に起因するドップラー効果により光(電磁波)の波長が赤方偏移したことによる.
- 膨張を引き起こす暗黒エネルギーは真空のエネルギーに関与している可能性が高い.
- ここでは真空のエネルギーの現出とも言えるカシミール効果を再考する.

赤方偏移



カシミール効果と数理的背景

簡単のためクライン・ゴルドン場を考える.

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx/\hbar} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx/\hbar})$$

以下の自由場ハミルトニアンは無限個の調和振動子と同等

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p\, \omega_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_p^\dagger)$$

したがって真空のエネルギーは次のようにかける

$$\langle 0| H |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} = \infty$$

真空のエネルギー
は発散する

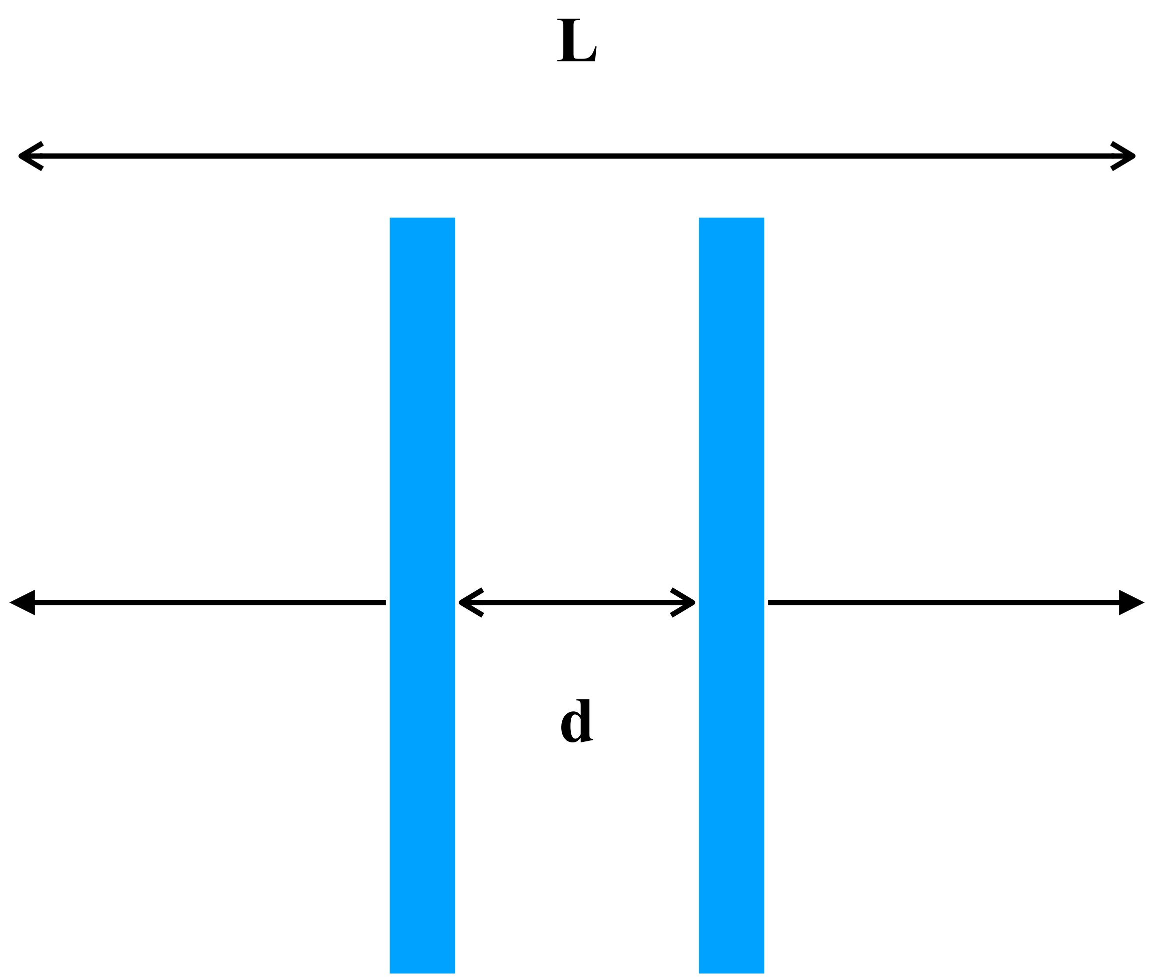
2枚の平板を距離dで設置した場合

まずは1次元系としてを計算（その方向は[0,L]とする）

周期境界条件φ(x)=φ(x+L)として
d<<Lとすると

$$\vec{p} = (\frac{n\pi}{d}, p_y, p_z)$$

$$E_{1+1}(d) \to \frac{\pi}{2d}\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$$



変わらず真空エネルギーは発散

2枚の平板を距離dで設置した場合

熱核正規化を行い発散を抑えながら計算

$$
\begin{aligned}
E_{1+1}(d) \to \frac{\pi}{2d}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-an\pi/d} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an\pi/d} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{1-e^{-a\pi/d}} \\
&= \frac{\pi}{2d}\frac{e^{a\pi/d}}{(e^{a\pi/d}-1)^2} \\
&= \frac{d}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24d} + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned}
$$

a→0では確かに発散するが，aを導入することで制御されている

1次元カシミール力

全体のエネルギーは以下で与えられる

$$E_{1+1} = E_{1+1}(d) + E_{1+1}(L-d) = \frac{L}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24}(\frac{1}{d} + \frac{1}{L-d}) + \mathcal{O}(a^2)$$

エネルギー自体は発散しているが，dに依存する部分は有限

よってカシミール力は一次元では

$$F = -\frac{\partial E_{1+1}}{\partial d} = -\frac{\pi}{24d^2}$$

無限大の真空エネルギーから
有限の力が出現！

真空中に二枚の平行金属板を置くだけでその間に引力が働く
この現象のことをカシミール効果，その力をカシミール力と呼ぶ

3次元カシミール力

3次元では次のエネルギーを熱核正規化で計算すれば良い

$$\frac{E(d)}{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\vec{P}^2} \cdot e^{-a\sqrt{\vec{P}^2}}$$

この場合のカシミール力の大きさは

$$\frac{1}{A}\frac{\partial E}{\partial d} = \frac{\pi^2}{480 d^4}$$

やはり無限大の真空エネルギーから
有限の力が出現！

電磁波の場合自由度が２つあるので

$$\frac{1}{A}\frac{\partial E}{\partial d} = \frac{\pi^2}{240 d^4}$$

これは確かに実験で観測されている

Lamoreaux, S. K. (1997). "Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range". *Physical Review Letters*. **78**: 5.

ζ関数による正規化

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

となり有限な結果がえられる

$$\frac{\pi}{2d}\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{\pi}{24d}$$

この式をdで微分すると
1次元のカシミール力が得られる

3次元でも

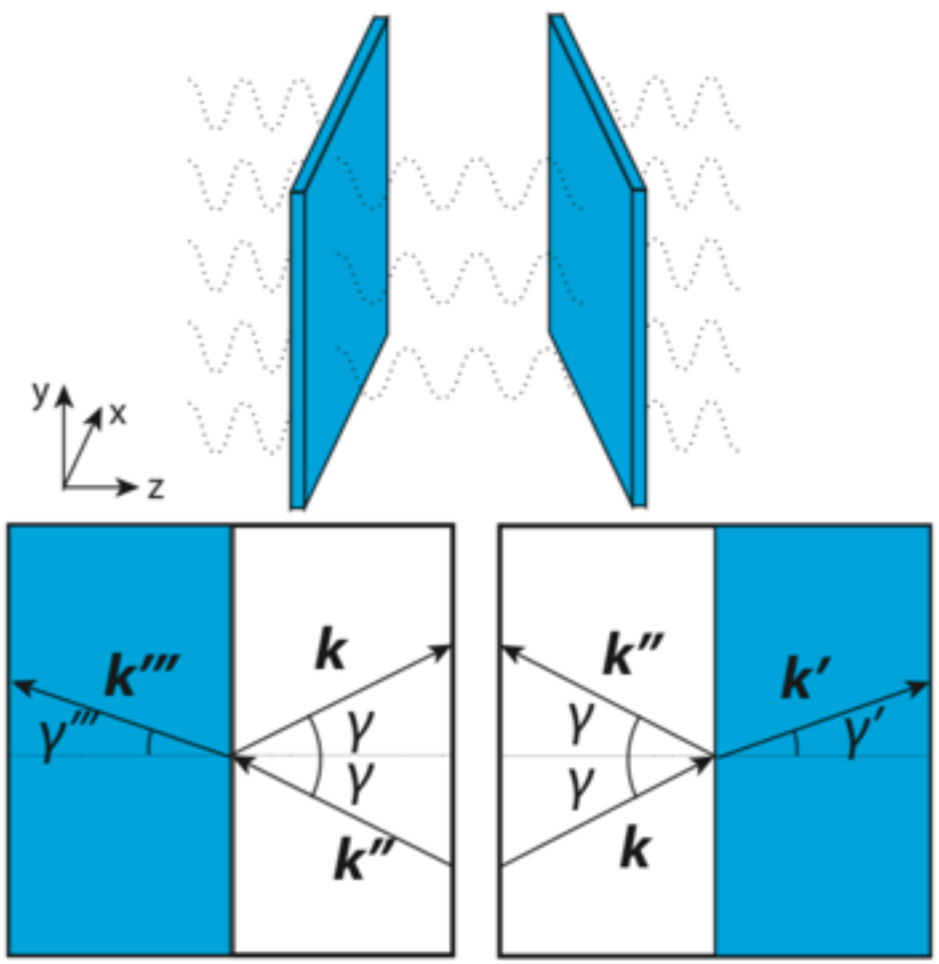
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = \zeta(-3) = -\frac{1}{120}$$

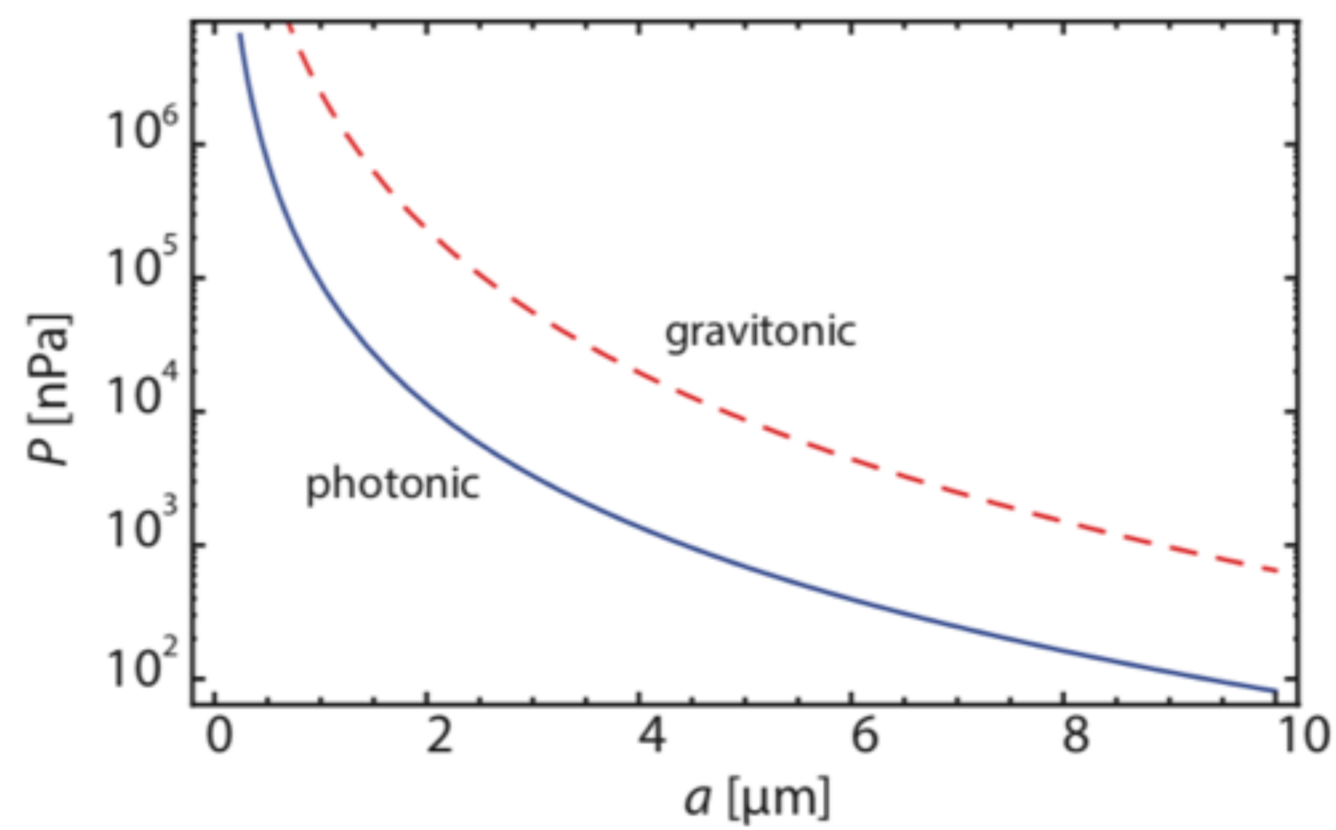
となって同様にカシミール力
を瞬時に求めることができる

「平板を置いた場合の真空エネルギー」から「何も置かない場合の真空エネルギー」を引き去る操作を熱核正則化やζ関数正規化は自然に行っていると言えよう．（無限を多く含む自然現象に適した正規化）

重力子とカシミール効果について

- ここまでやってきたことは一般の量子場にも当てはまるので重力子についてもカシミール力を計算することが可能
- 近年ではプレートの置き方を変えてカシミール力を計算すると重力子の方が光子より影響が強くなる条件があることが判明





"Gravitational Casimir effect", James Q.Quach, Phys. Rev. Lett. 114, 081104 (2015)

<u>参考文献</u>

[1] "Quantum Field Theory", University of Cambridge
Part III Mathematical Trip, David Tong

[2]"Gravitational Casimir effect", James Q.Quach,
Phys. Rev. Lett. 114, 081104 (2015)

[3] M.Kaku, Quantum Field Theory,(Oxford,1992)

[4] J.J.Sakurai 現代の量子力学（下）

[5] 新版　演習場の量子論　柏太郎