

# 数理科学の威力と魅力

-自然界の真の姿を探る-

第1講：数理科学により見えてきた自然界の真の姿

秋田大学大学院 理工学研究科 数理科学コース

三角樹弘(みすみ たつひろ)

# 力の種類

**強い力**

×

**弱い力**

×

**電磁気力**

×

**重力**

原子核・核子  
を作る力

放射性崩壊(β崩壊)  
を引き起こす力

発電・電化製品を  
動かす力

星の運動を  
起こす力

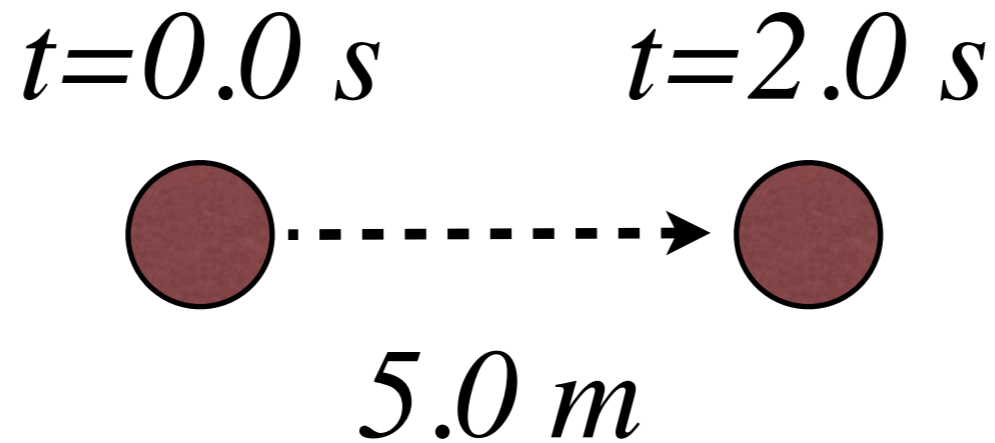
宇宙初期には一体だった

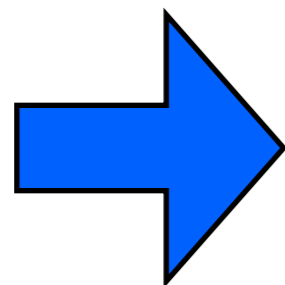
**標準理論 = 量子論+特殊相対論**

**一般相対論**

# 特殊相対論と一般相対論

# 物の速度(速さ)って何？

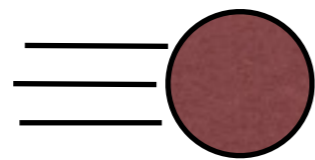



$$v = 5.0\text{ m} / 2.0\text{ s} = 2.5\text{ m/s}$$

物理では単位が非常に大切！

# 物の加速度って何？

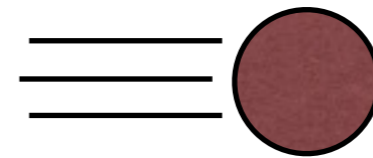
$$v=2.5 \text{ m/s}$$



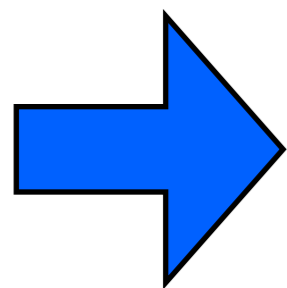
$$t=0.0 \text{ s}$$



$$v=4.5 \text{ m/s}$$



$$t=1.0 \text{ s}$$



$$a = (4.5 - 2.5) \text{ m/s} / 1.0 \text{ s} = 2.0 \text{ m/s}^2$$

加速度の単位の登場！

# 力って何？

$$a = F/m$$

$$\equiv m$$

ニュートンの運動方程式  $F = ma$

$$F[\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2] = m[\text{kg}] \times a[\text{m}/\text{s}^2]$$

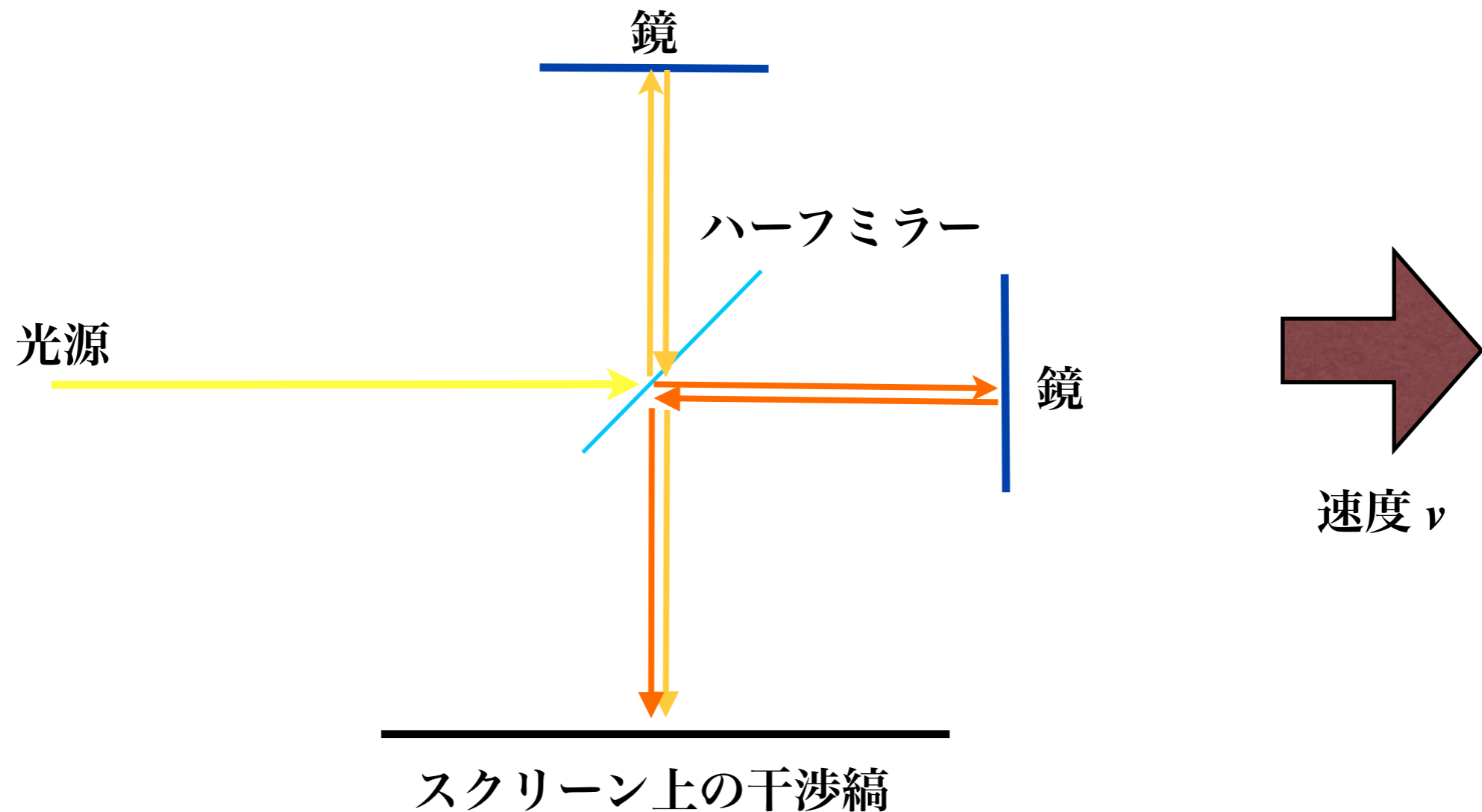
力とは加速度に質量をかけたもの

# 光速不変の原理と特殊相対論

- 光速不変の原理：光速は車の中から見ても不変
- この原理から得られる驚くべき結論 →
- 時間・距離・同時性 は慣性系に依存
- 光速度(30万km/s)に近づくと顕著

# ◆実験結果は光速不変を指示！

マイケルソン-モーレーの干渉計実験 (1887)

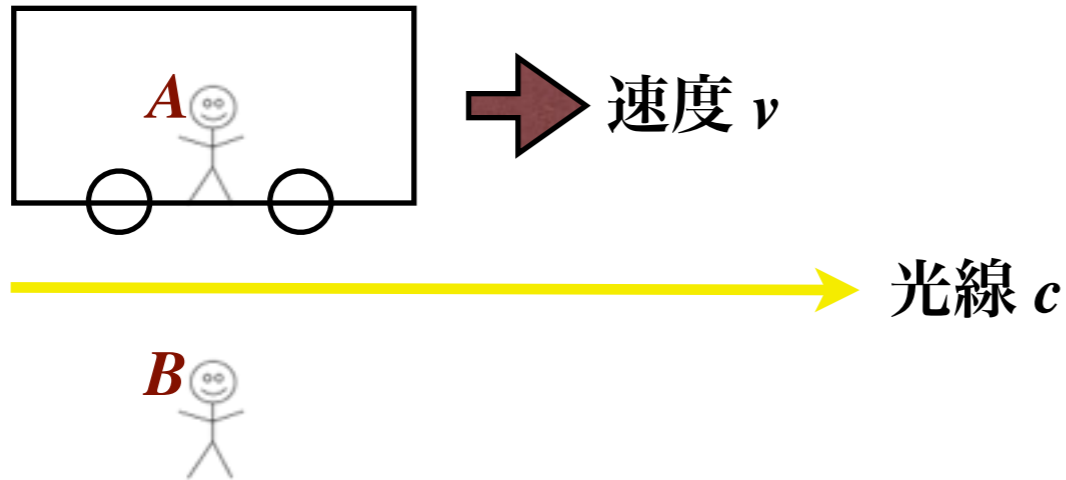


結局、干渉縞に変化はなかった。

→ 光速は不変！ 光速不変の原理が正解！



# ◆光速不変の原理



$A$ 視点の光速： $c$

$B$ 視点の光速： $c$

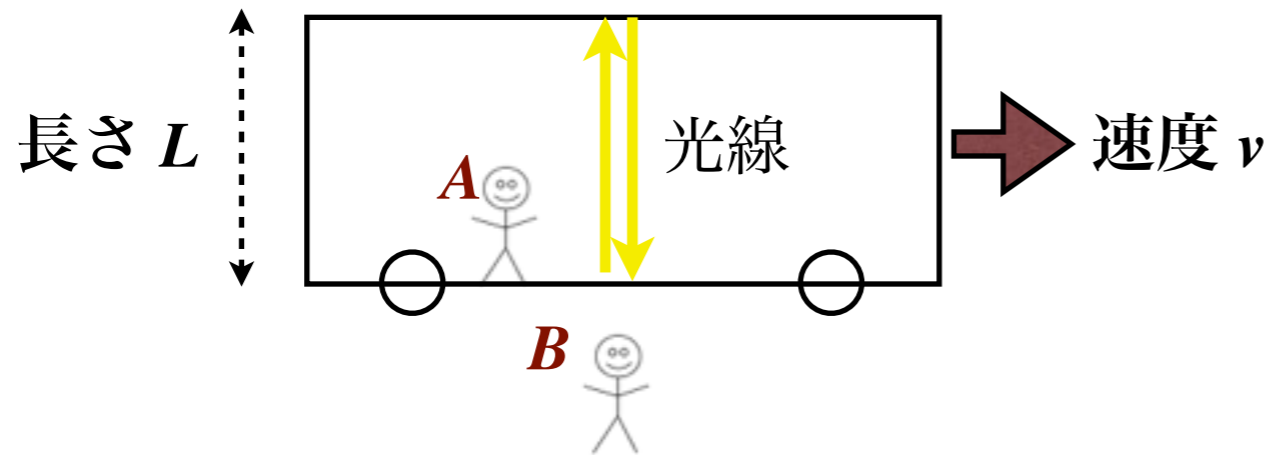
$A$ 視点の光速  $c = \frac{c[\text{m}]}{1[\text{s}]}$

$B$ 視点の光速  $c \neq \frac{(c - v)[\text{m}]}{1[\text{s}]}$   $c = \frac{?[\text{m}]}{?[\text{s}]}$

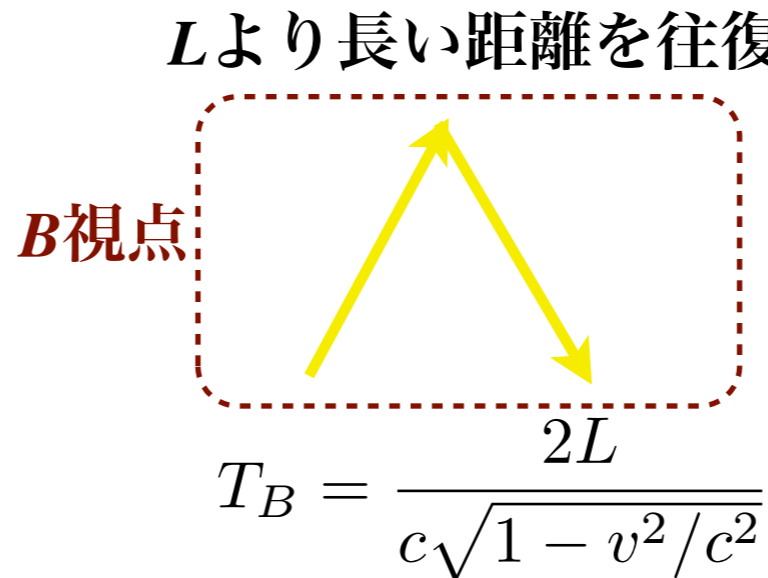
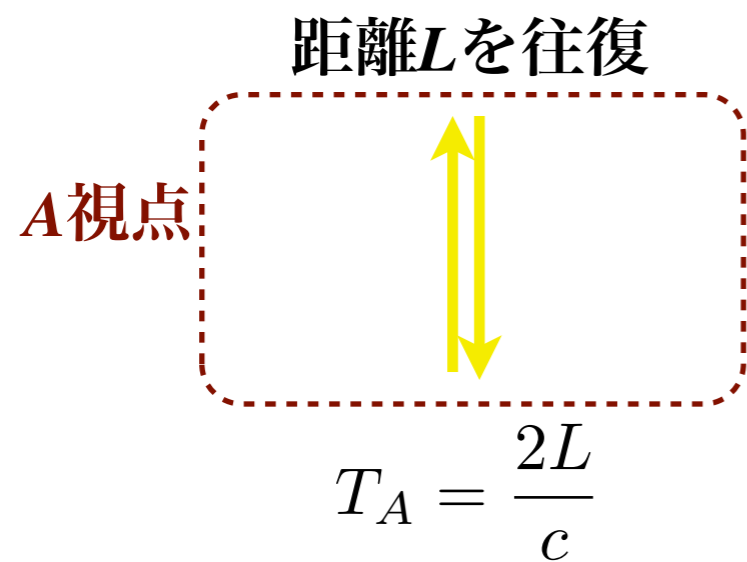
時間の進み方と距離の概念の変更の必要あり！

# ◆時間の遅れとローレンツ変換

- 速度 $v$ で動く列車を考える
- 床-天井間(長さ $L$ )の光線(光速 $c$ )往復で時間を計る



A視点でもB視点でも光の速度は同じ (光速度  $c$ )

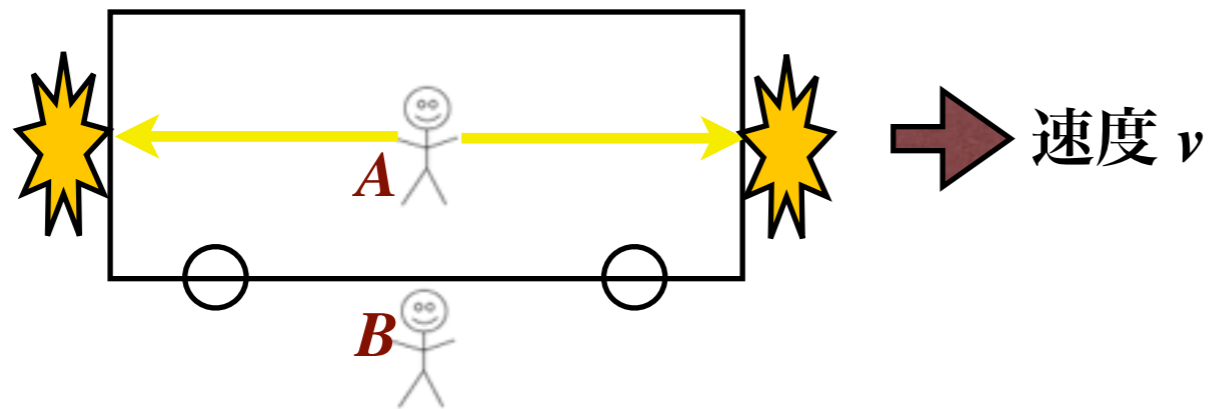


同速度の光がB視点では長い距離を走る

速度を持つ系では相対的に時間の進みが遅い  $T_A < T_B$

## ◆同時の相対性

- ・動く列車の中心から両端に光線を打ち到達すると爆発。



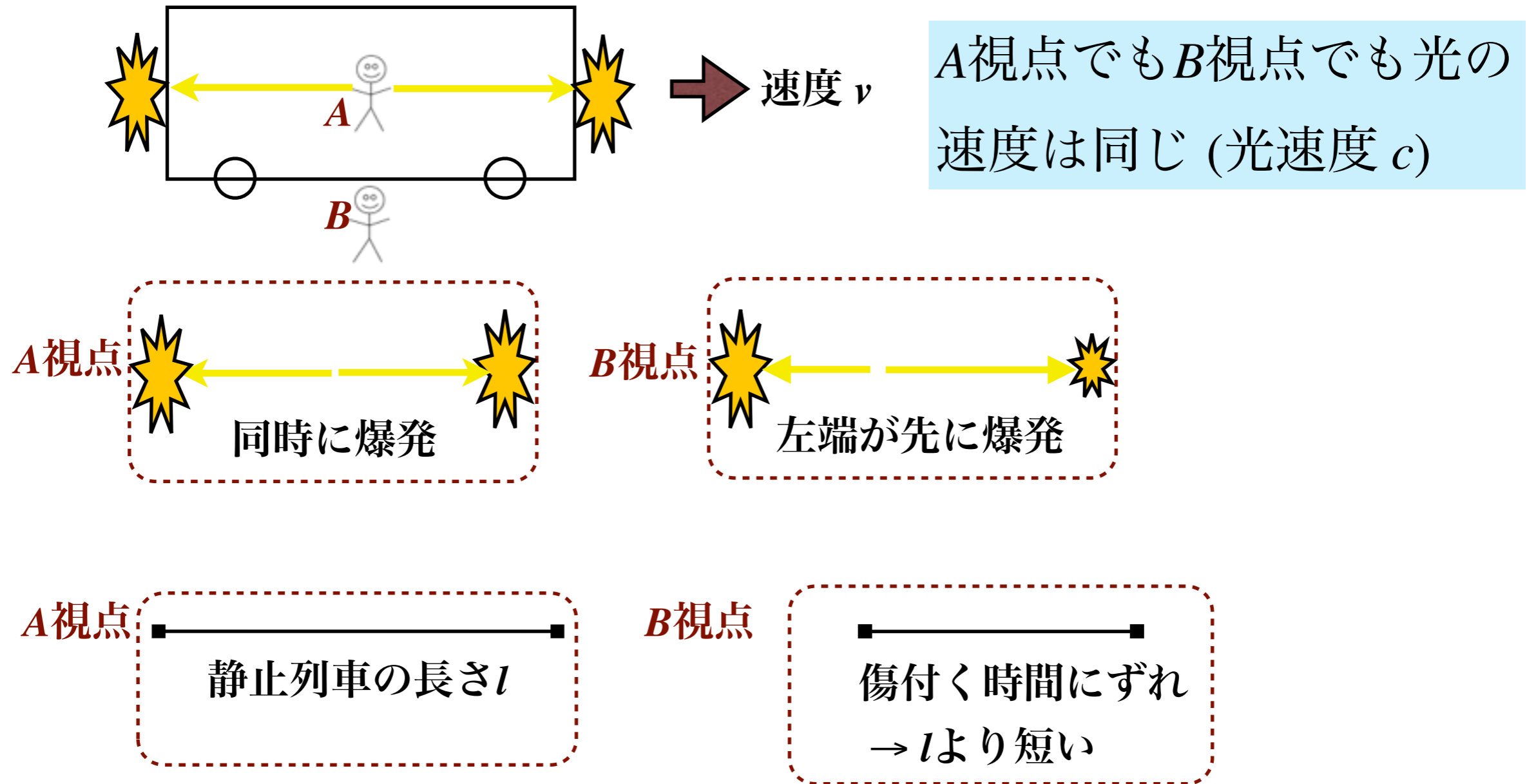
A視点でもB視点でも光の速度は同じ (光速度  $c$ )



系によって同時の概念は異なる

# ◆距離の縮みとローレンツ収縮

- $A$ が持つ棒と $B$ が持つ棒に付く傷から列車の長さを計る

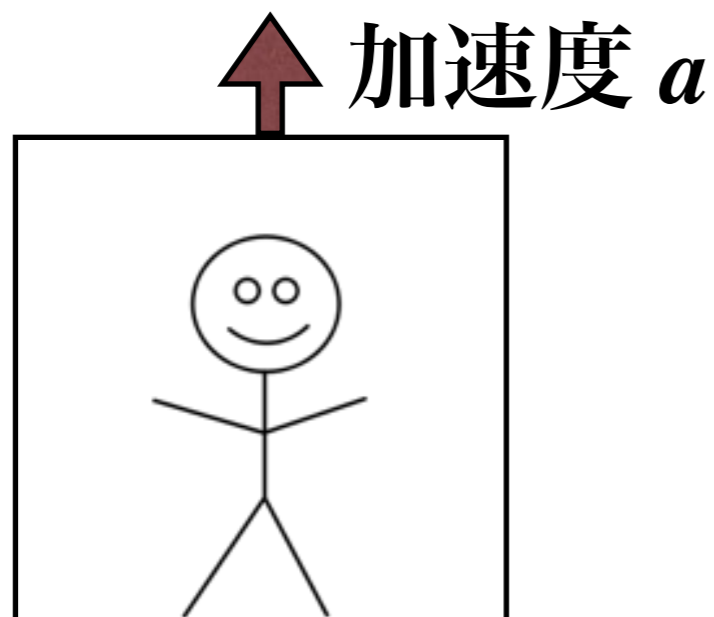


速度を持つ系から計測すると距離は縮む：ローレンツ収縮

# 一般相対論

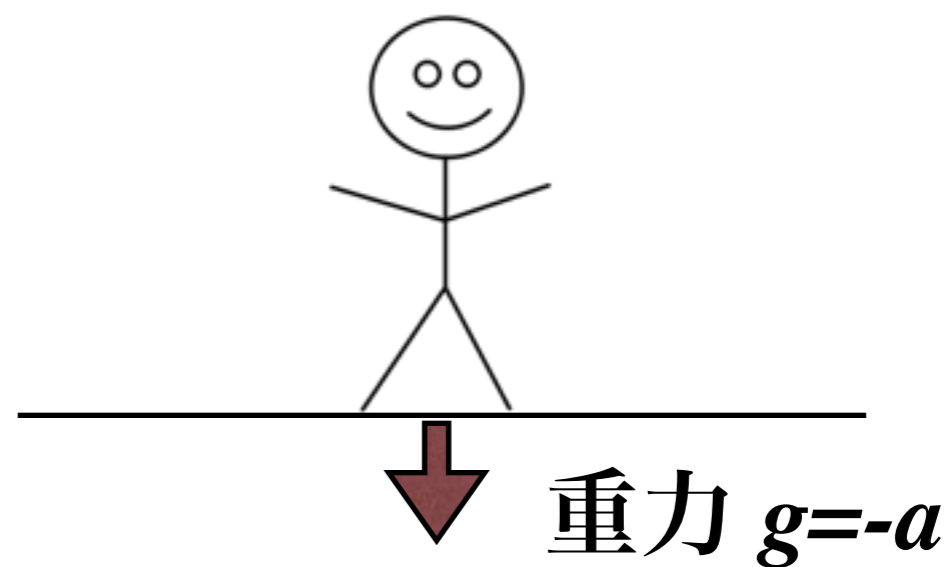
- 特殊相対論を加速系まで拡張
- 相対性原理：物理法則は系に依らない
- 等価原理：加速系は重力系と等価
- 重力中で光は曲がる・時間の進みが遅くなる
- ニュートン重力を越えた重力理論の完成

# ◆ 加速度系 = 重力系



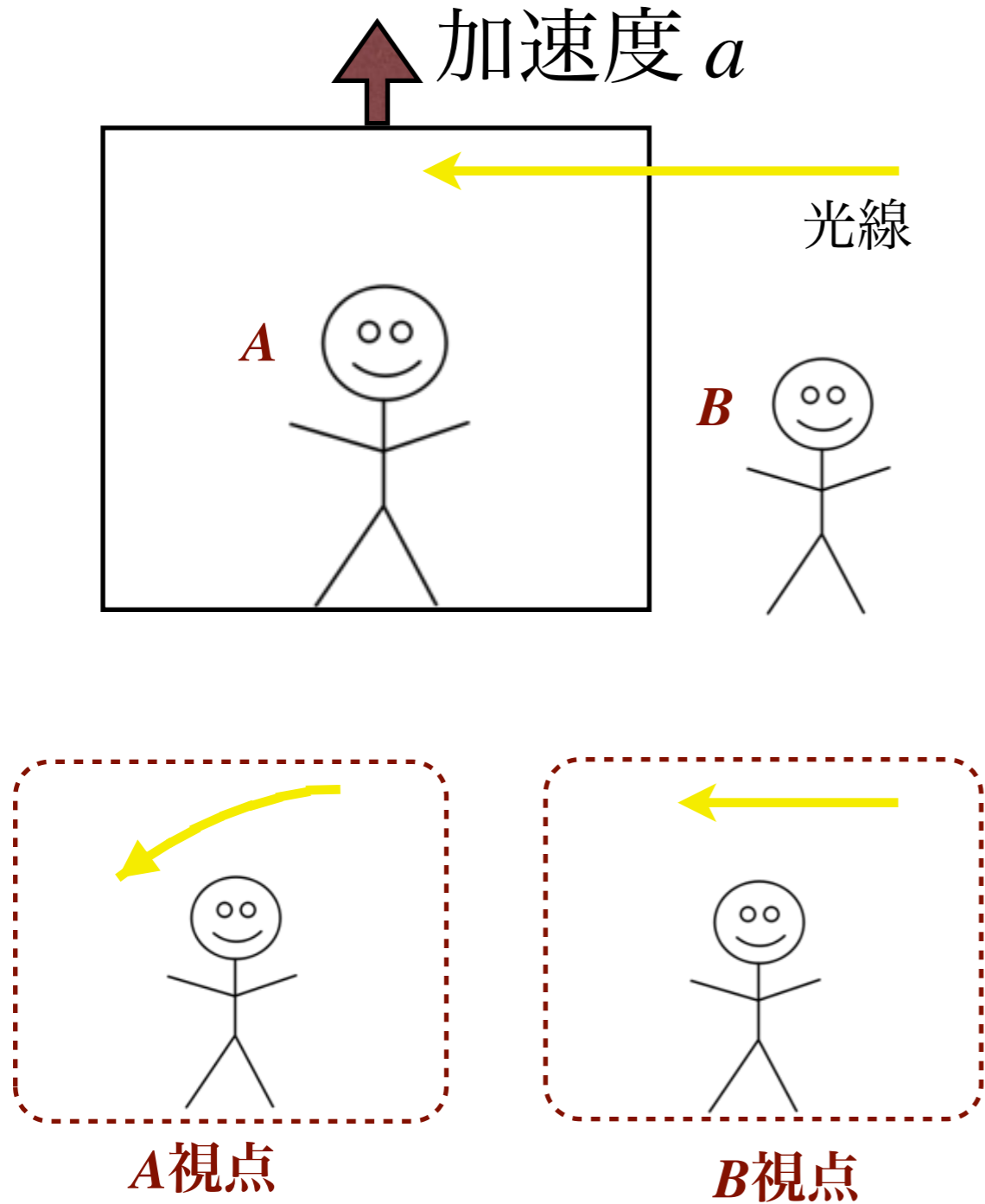
等価

=



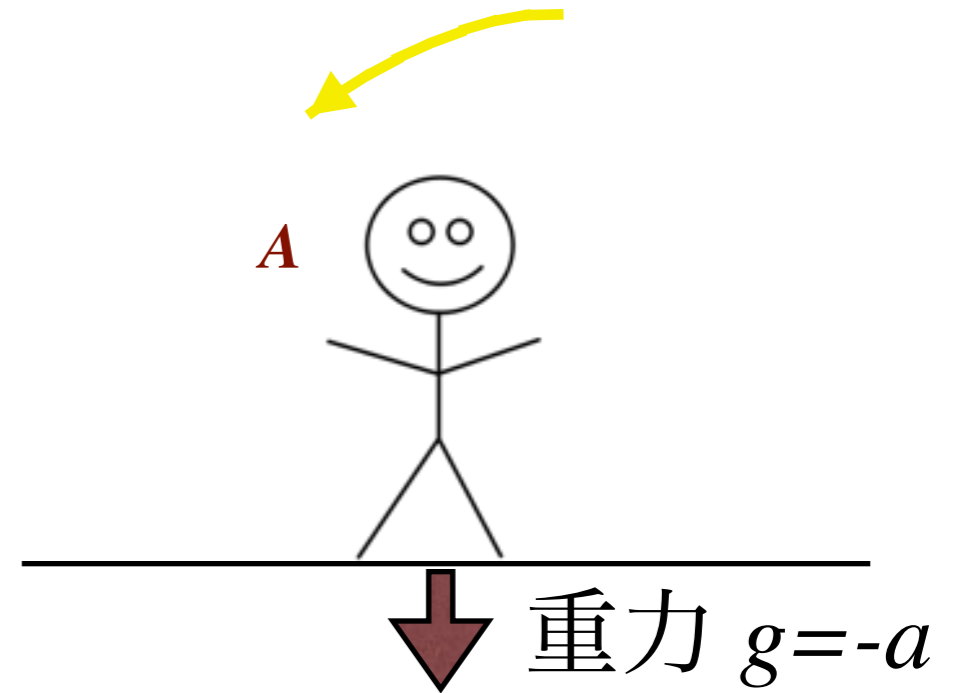
中にいる人は  
慣性力  $-a$ を感じる

# ◆重力中で光は曲がる



等価  
=

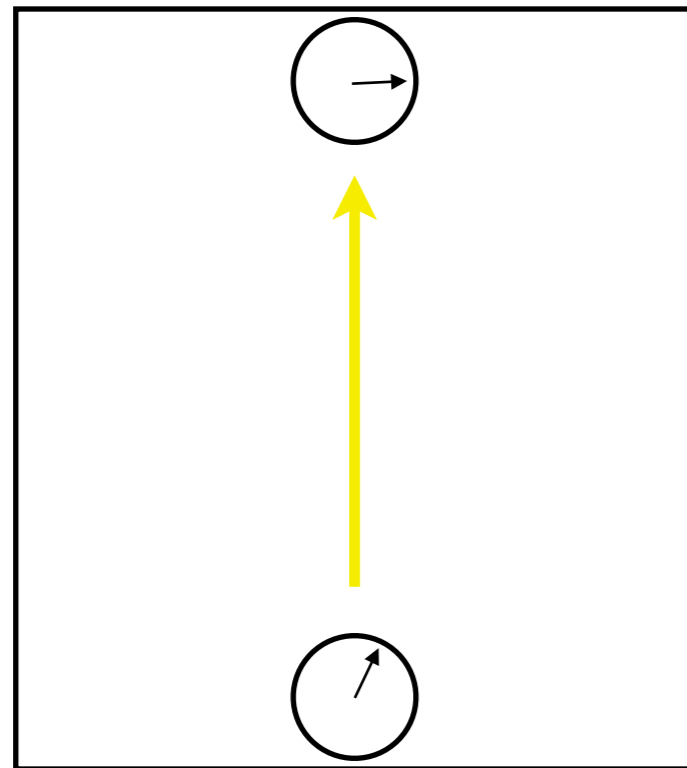
重力方向へ光は曲がる



# ◆重力中での時間の遅れ

↑ 加速度  $a$

周期  $T_B$  で光信号受信



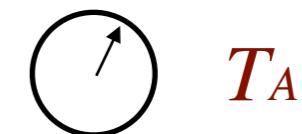
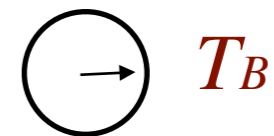
周期  $T_A$  で光信号送信

$$T_B > T_A$$

等価

=

重力の強い所は時間の進みが遅い

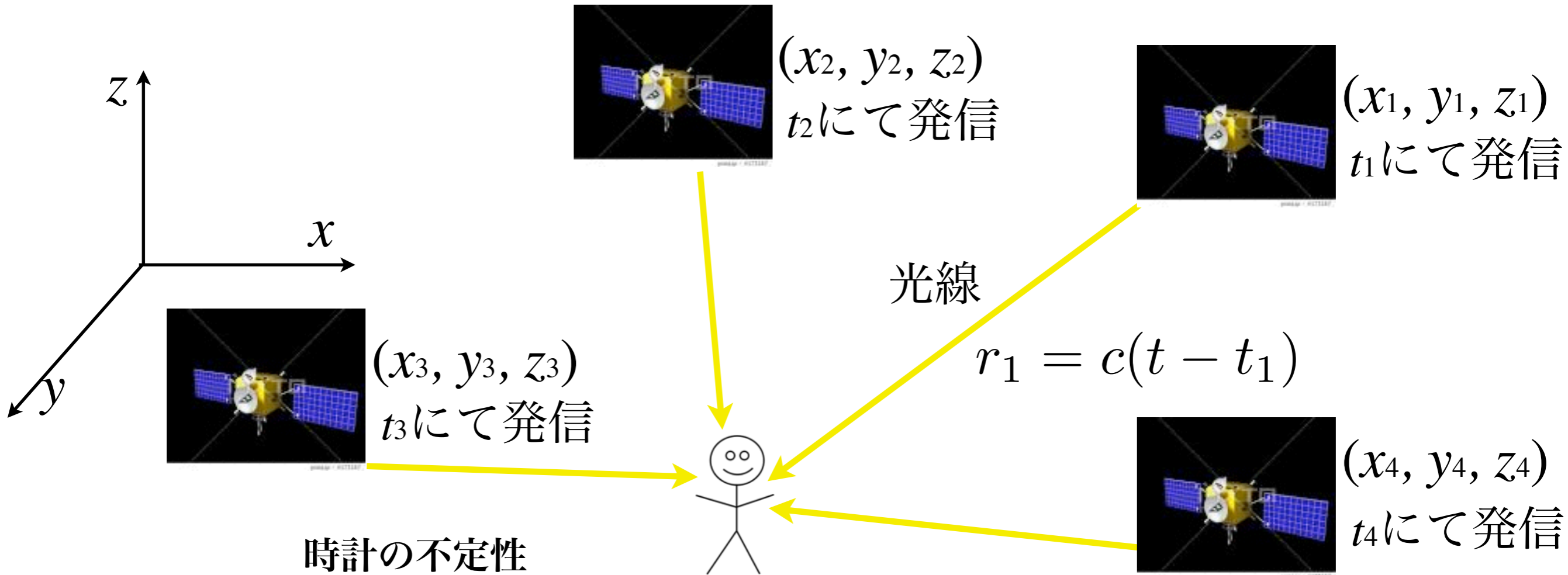


重力  $g = -a$

$$T_B > T_A$$



# GPS (Global Positioning System)



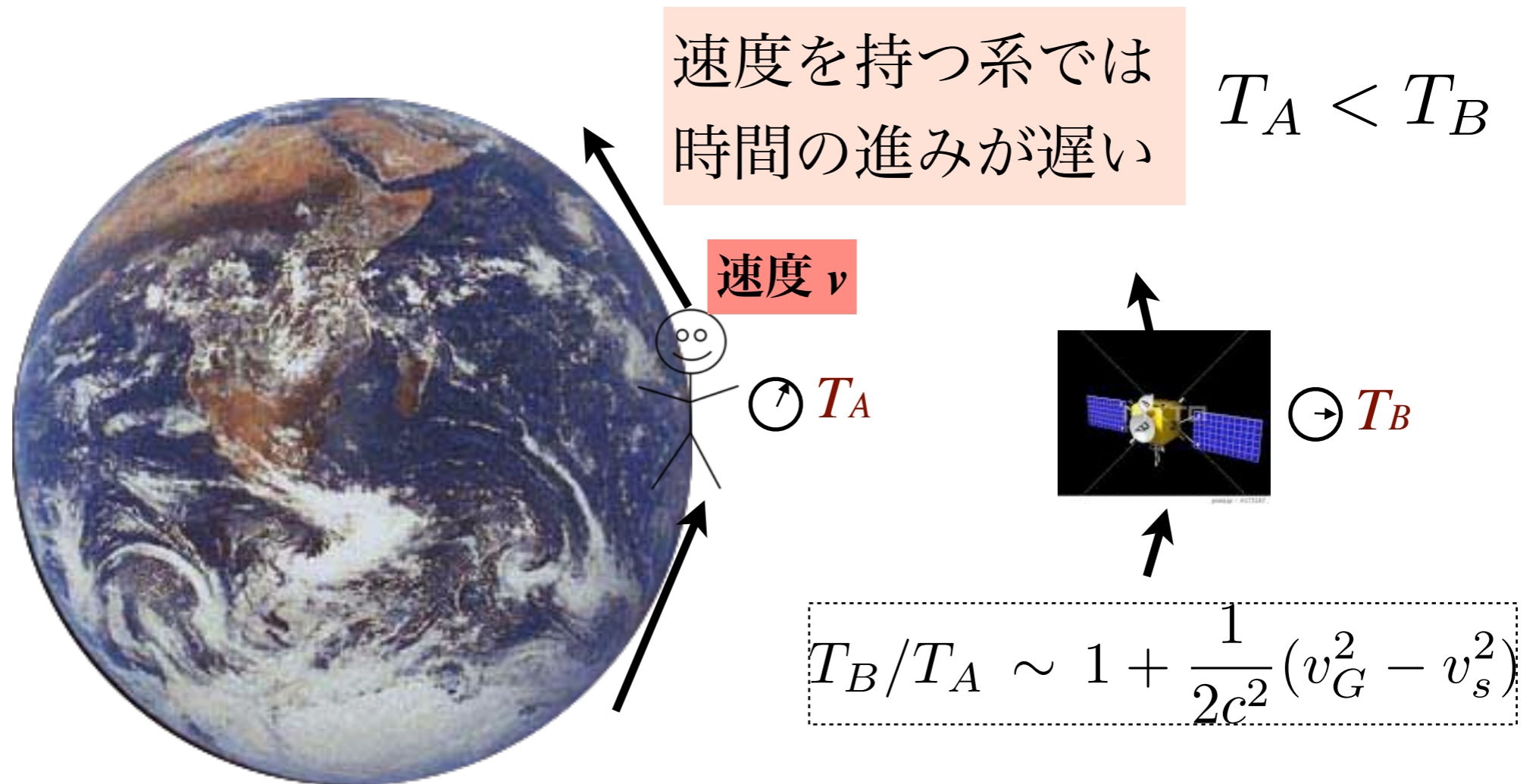
$$(r_1 - c\delta)^2 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2$$

$$(r_2 - c\delta)^2 = (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 + (Z - z_2)^2$$

$$(r_3 - c\delta)^2 = (X - x_3)^2 + (Y - y_3)^2 + (Z - z_3)^2$$

$$(r_4 - c\delta)^2 = (X - x_4)^2 + (Y - y_4)^2 + (Z - z_4)^2$$

# 相対論によるGPS時刻補正



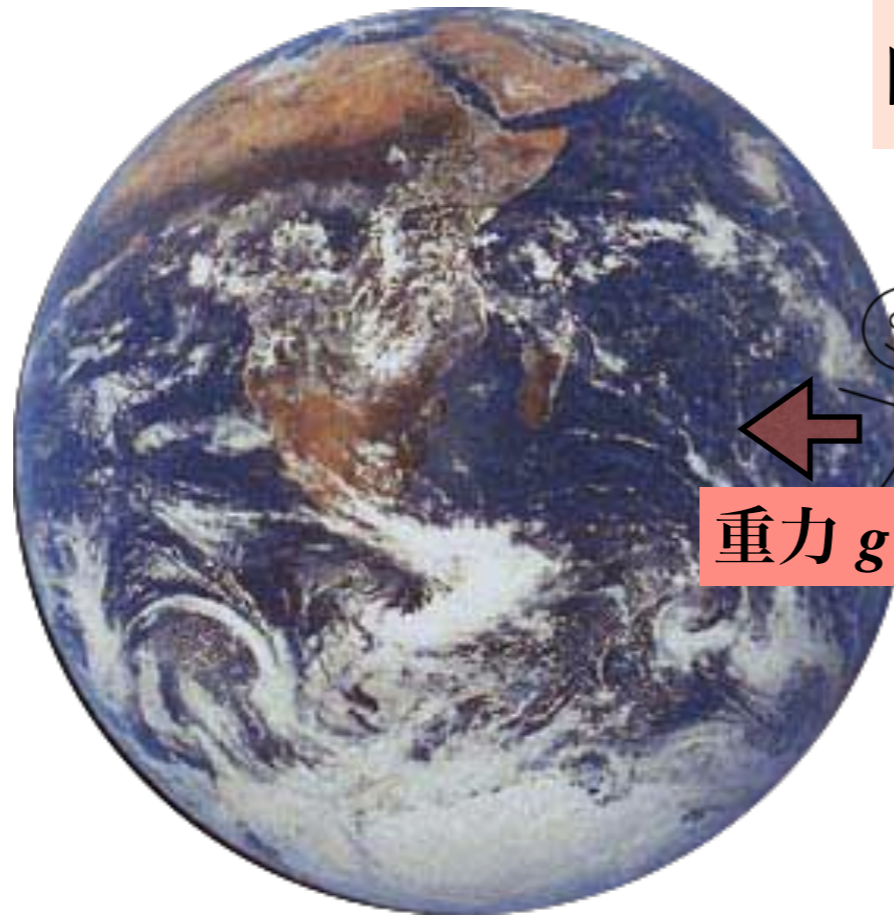
- 自転運動(ケプラー運動)による速度差 → 特殊相対論
- 地球の重力による重力の大きさの差 → 一般相対論

静止地球の条件にするにはGPS時計に時間を少し加える

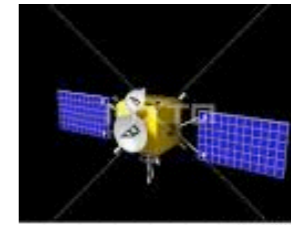
# 相対論によるGPS時刻補正

重力場中では  
時間の進みが遅い

$$T_A < T_B$$



⌚  $T_A$



⌚  $T_B$

$$T_B/T_A \sim 1 + \frac{GM_e}{c^2} \left( \frac{1}{r_G} - \frac{1}{r_s} \right)$$

- 自転運動(ケプラー運動)による速度差 → 特殊相対論
- 地球の重力による重力の大きさの差 → 一般相対論

重力のない条件にするにはさらに時間を加える

# 重力波：LIGOで測定

重力理論としての一般相対論の完成  
→ 重力波による物理現象観測の時代へ

# 量子論と相對論的量子力学

# 波動と粒子の二重性 ~量子論~

- 。万物は「粒子」と「波」両方の性質を持つ
- 。運動量  $p=mv$  の「粒子」 = 波長  $\lambda=h/p$  の「波」
- 。位置と速度は同時に確定しない → 不確定性原理
- 。プランク定数  $h \sim 10^{-34}$  [J・s]に近いスケールで顕著

# 波動と粒子の二重性 ~量子論~

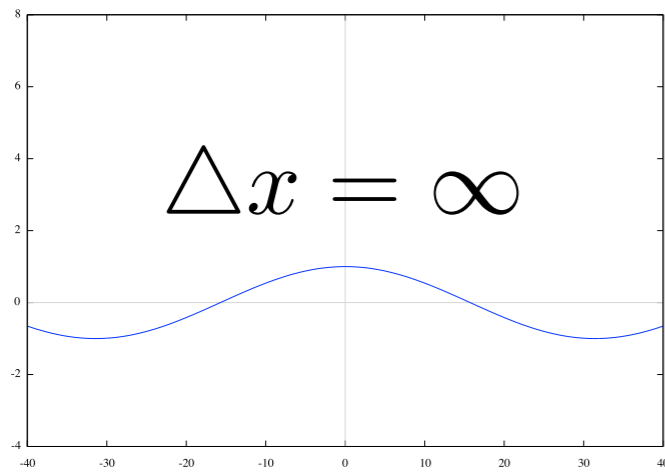
量子力学の基本原則：

万物は「波動」と「粒子」両方の性質を持つ

ド・ブローイ関係式  $p = \frac{h}{\lambda}$   $h = 6.63 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]$

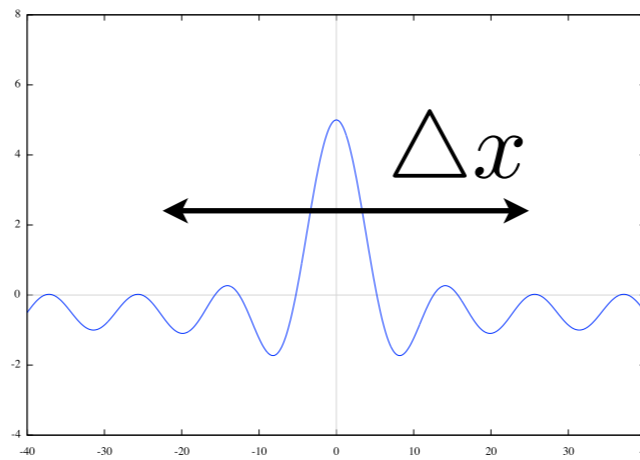
- 。原子はとびとびのエネルギーを持つ(電子の波動性)
- 。弱いガンマ線でも細胞が傷付く(電磁波の粒子性)
- 。物体は障壁をある確率で越えられる(物体の波動性)

# ◆二重性と不確定性関係

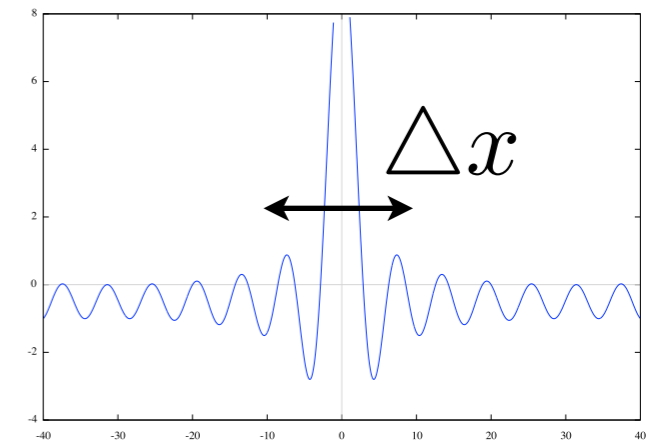


1種類の波長

$$\Delta p = 0$$



5種類の波長



10種類の波長

$$\Delta p \rightarrow \infty$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

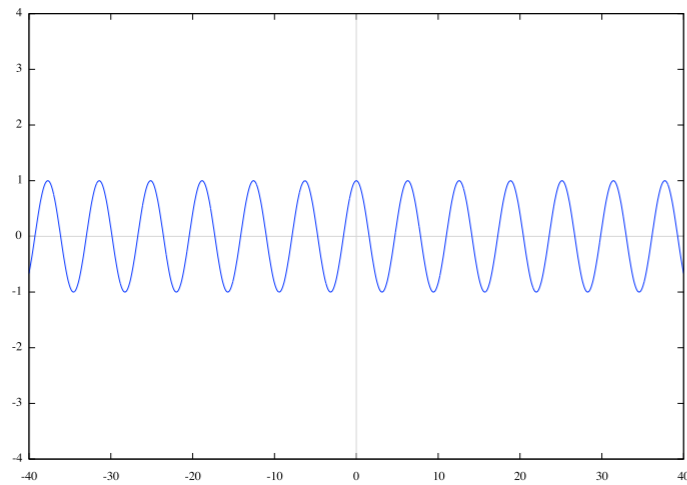
不確定さはプランク定数  $\hbar \sim 10^{-34} [J \cdot s]$  程度



# ◆二重性と不確定性関係

- 波長  $\lambda$  が決まった波

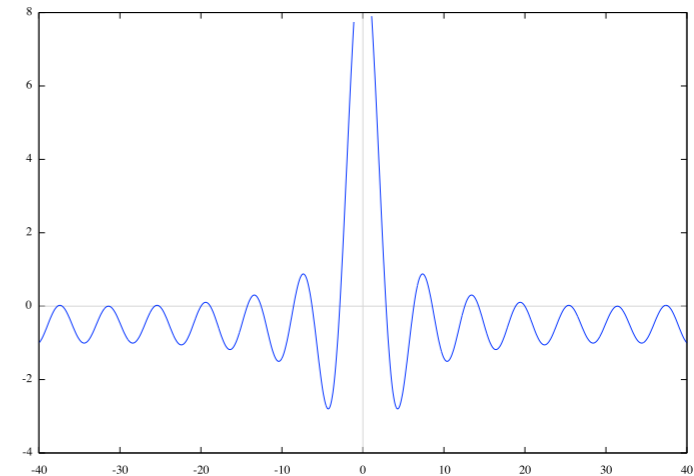
→ 運動量  $p = h/\lambda$  が決定



全ての位置  $x$  の状態の和  
位置  $x$  は完全に不確定

- 位置  $x$  が決まった粒子

→ 位置  $x$  が決定



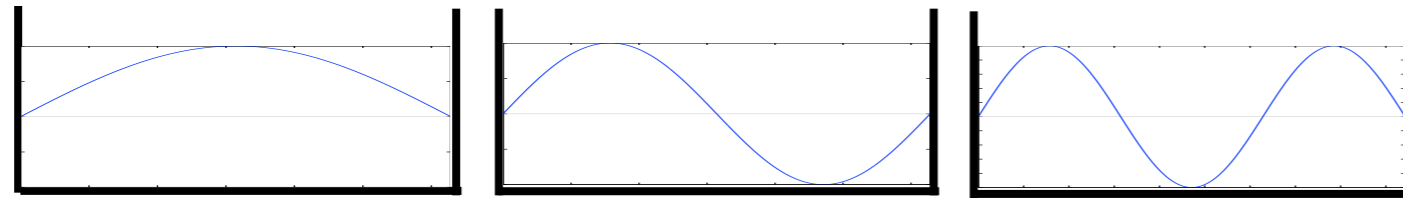
全ての波長(運動量)の状態の和  
運動量  $p$  は完全に不確定

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar)$$

不確定さはプランク定数  $\hbar \sim 10^{-34} [J \cdot s]$  程度

# ◆箱の中(原子中)の粒子

閉鎖空間で定常波は特定のモードしか取れない



n=1  
 $\lambda=2L$

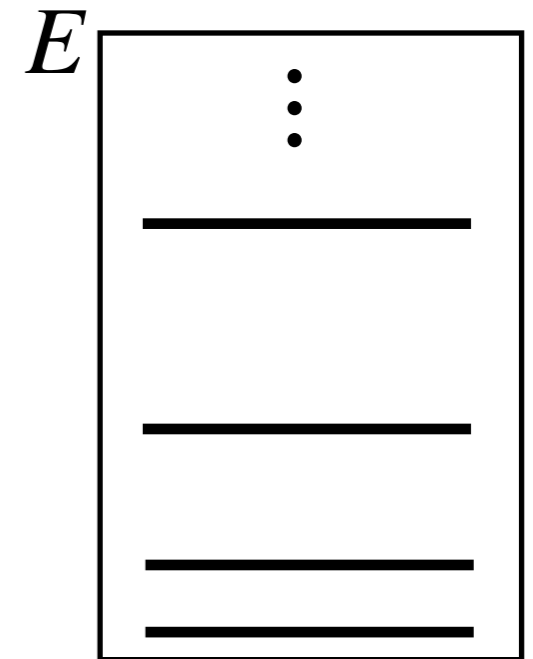
n=2  
 $\lambda=2L/2$

n=3  
 $\lambda=2L/3$

波長 :  $\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

運動量 :  $p = \frac{nh}{2L}$

エネルギー準位 :  $E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$



「波動性」を考慮すると原子エネルギーはとびとび

## ◆ 日常レベルと原子レベル

- 1[kg]の物を1[m]に閉じ込めた場合

$$\frac{h^2}{8mL^2} = \frac{36 \times 10^{-68} [\text{J}^2 \cdot \text{s}^2]}{8 \times 1 [\text{kg}] \times (1 [\text{m}])^2} \sim 10^{-68} [\text{J}]$$

日常生活レベルではほぼ連続的なエネルギー

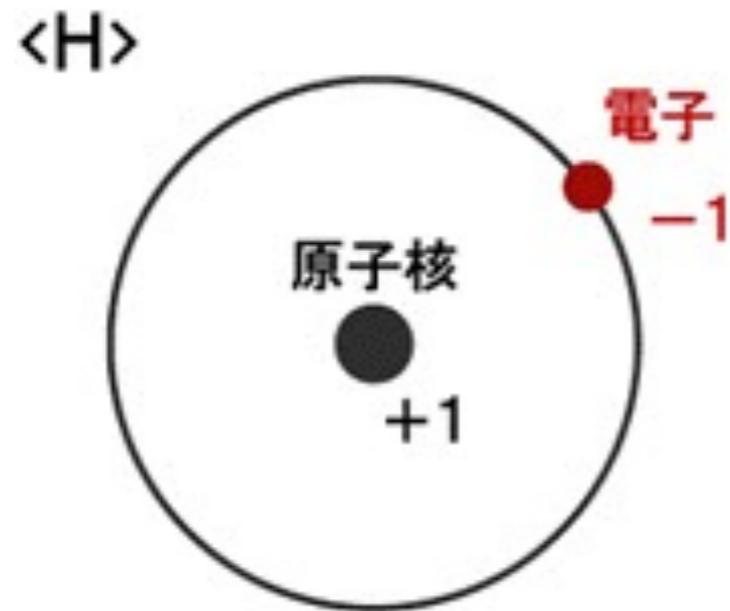
- 電子( $10^{-30}$  [kg])の物を原子内( $10^{-10}$  [m])に閉じ込めた場合

$$\frac{h^2}{8mL^2} = \frac{36 \times 10^{-68} [\text{J}^2 \cdot \text{s}^2]}{8 \times 10^{-30} [\text{kg}] \times (10^{-10} [\text{m}])^2} \sim 10^{-18} [\text{J}]$$

$10^{-19}$  [J]  $\sim$  1 [eV] : 1Vの電圧で加速した電子のエネルギー

原子・電子レベルでは全く無視出来ない

## ◆原子の基底エネルギー



$$\begin{aligned} E_0 &= -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} \\ &= -13.6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= -13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

約10eVという原子のエネルギーは完全に量子的に決まる

[eV] : エレクトロンボルト

→ 1V(ボルト)の電圧で加速された電子のエネルギー

◆ 身の回りの電池

→ 化学エネルギー

→ 原子のエネルギー準位の変化

→ 電子あたり数eV = 数Vの電圧

**電池の電圧が数ボルトであるのは  
これが理由！**

[eV] : エレクトロンボルト

→ 1V(ボルト)の電圧で加速された電子のエネルギー

◆ 可視光の波長領域 →  $\lambda = 400 \sim 800$  [nm]

→  $E = hc/\lambda = 1.5 \sim 3.0$  [eV] 光エネルギー

→ 視神経の反応も化学反応

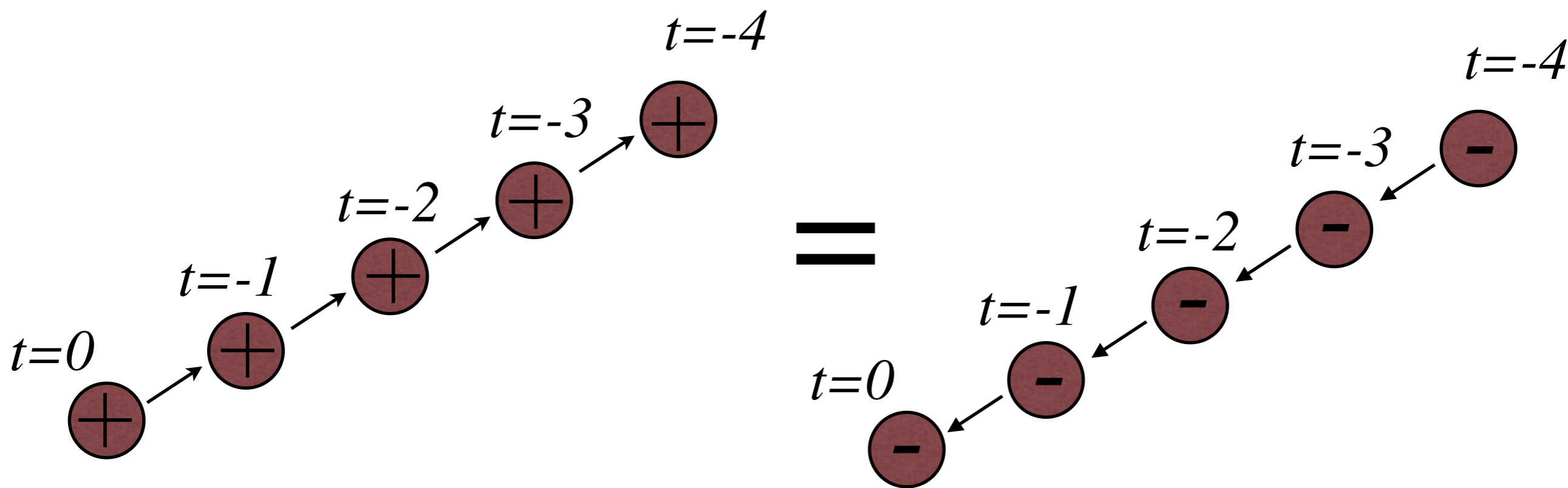
→ 原子のエネルギー遷移(数eV)

我々の見える光の波長が上記に限定されているのも量子現象のたまもの

# ◆反粒子の存在

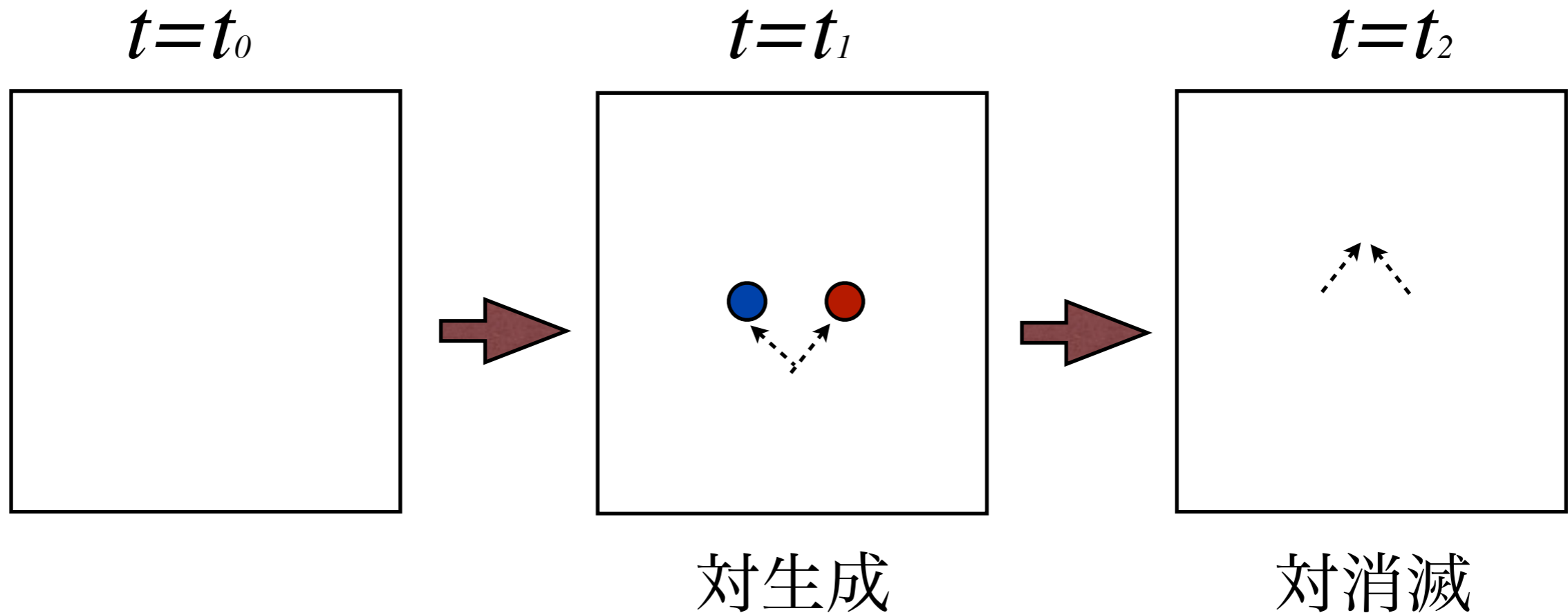
相対論的量子論では負エネルギー解が存在？

= 実は電荷などの性質が真逆の粒子が存在



量子論 + 相対論には反粒子が自然に含まれる！

# ◆粒子の存在そのものも不確定になる



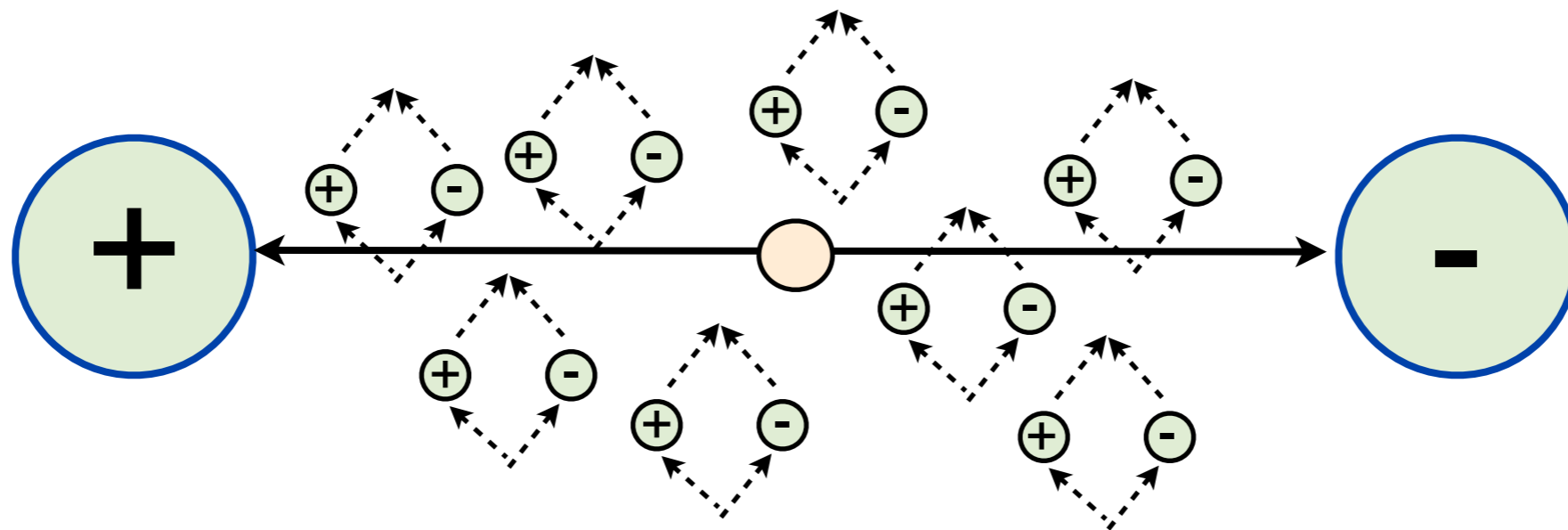
短時間 $\Delta t$ であれば $\Delta E \sim h/\Delta t$ 程度のエネルギー  
を持つ粒子が存在しても良い！

電磁波(光子)も瞬間的に電子-陽電子に対生成



# 最先端の素粒子理論

# ◆ 仮想粒子の存在

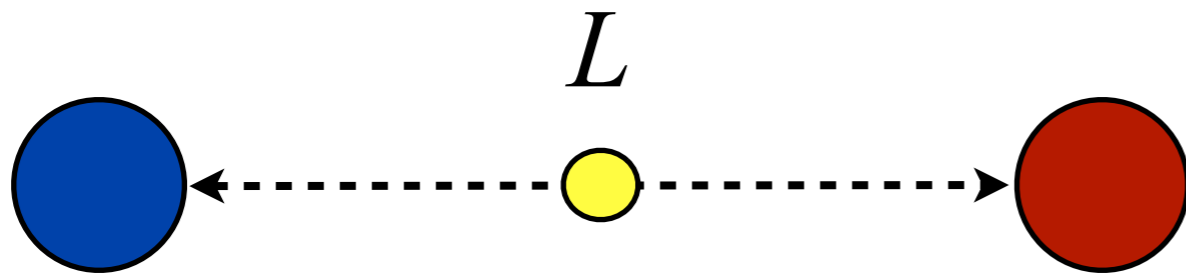


電子-陽電子が瞬間的に存在すること  
によって結びつきの強さが変わる

cf.) 繰り込み理論

朝永(1946)

# 粒子が力を伝える？



二つの粒子の間を  
仮想粒子が行き来する

- 光速  $c$  で飛ぶと  $L/c$  秒
- $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$  から  $\Delta E \sim \hbar c/L$
- $E = mc^2$  から  $m = \hbar/(cL)$

*cf.*)陽子-中性子間のパイ中間子の場合

$$\hbar = 10^{-34}[\text{Js}], \quad c = 3 \times 10^8[\text{m/s}], \quad L = 10^{-15}[\text{m}]$$

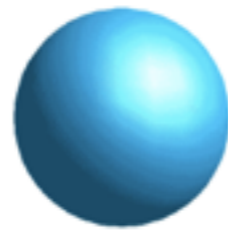
$$\rightarrow m = \hbar/(cL) \sim 3 \times 10^{-28}[\text{kg}] \sim 200[\text{MeV}]$$

$\pi$  中間子の存在と質量を見事に予言！

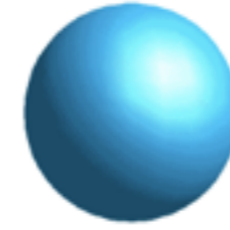
# ゲージ対称性

対称性：ある変化(変換)を加えても状況が変わらないこと

例) 3次元回転対称



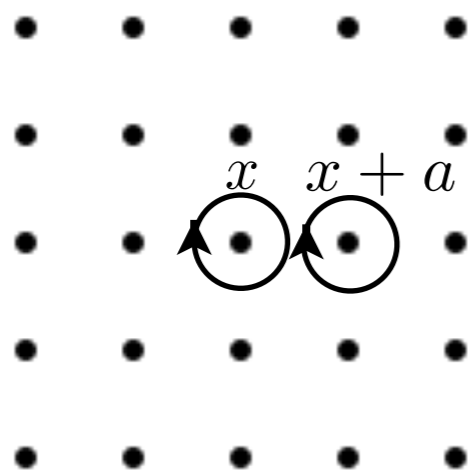
回転  
→



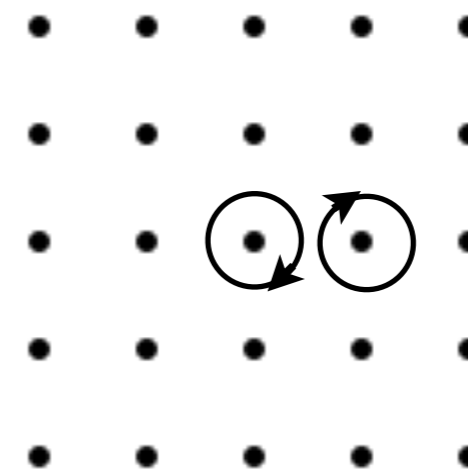
変化なし！

対称性が理論を規定 → 状態・粒子を規定

◆局所ゲージ変換：全ての時空点で独立に回転



独立に回転

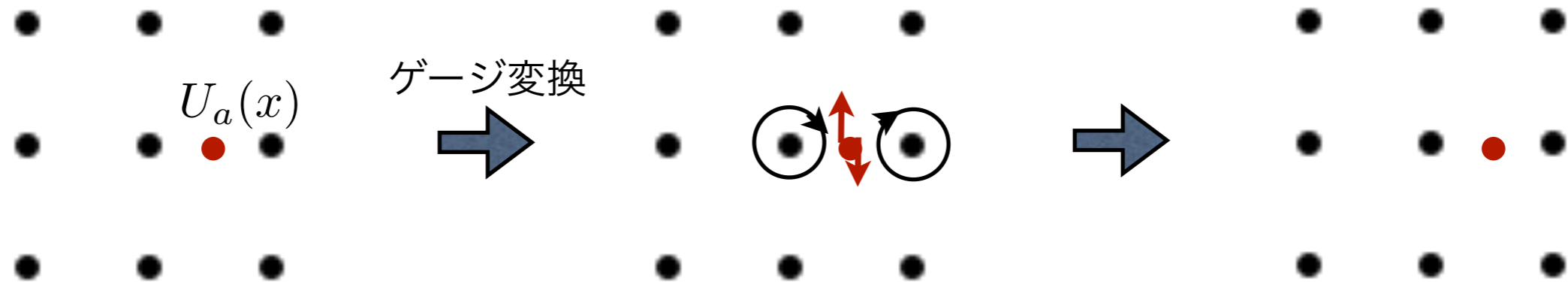


元に戻らない！

単純な理論はゲージ対称ではない

# ゲージ場とゲージ対称性

隣同士の回転差を相殺するように変換する粒子を導入



**ゲージ対称性を持つ！**

自然の基礎理論は必ずゲージ対称性を持っている！

→ 重力理論、電磁気理論、弱い力理論、強い力理論

**自然の背景にゲージ原理の存在**

# ゲージ場の量子論と質量

質量：物体の動きにくさ

ゲージ対称性：全ての粒子の質量を禁止

ところが...ほとんどの粒子は質量を持つ

クォーク：3~174000 MeV

レプトン：0~1777 MeV

ゲージボゾン：0~91000 MeV

参考)電子質量のない世界

→ 原子構成不可能

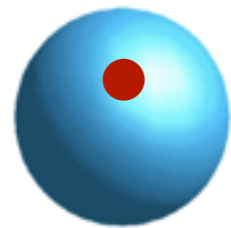
→ 自然界の様相は全く異なる

素粒子はどうやって質量を持つ？

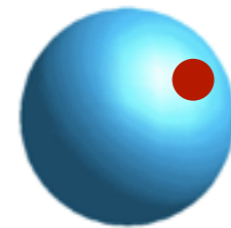
**ゲージ対称性の自発的破れ**

# 対称性の自発的破れ

対称性がある世界でも、ダイナミクスの帰結として  
対称性は”自発的”に破れ得る



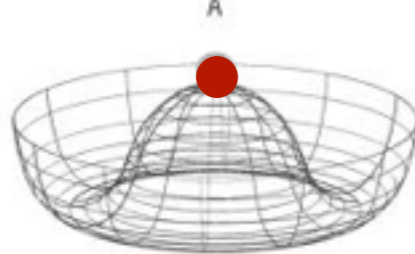
或る点を選ばれた  
場合の回転



対称性の破れ

- ◆ 自然はポテンシャル最小点=真空を選ぶ

位相回転対称



自発的破れ



ポテンシャル(理論)が対称でも  
真空が対称性を自発的に破る

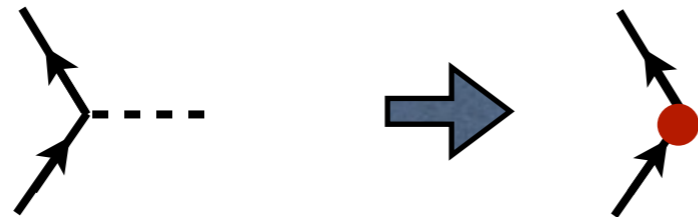
# ゲージ対称性の自発的破れ

ゲージ理論にヒッグス場を導入

- ヒッグスポテンシャル

ヒッグス凝縮が位相回転(ゲージ)対称性破る

- 相互作用項：



質量項を生成

標準理論では宇宙年齢 $10^{(-12)}$ 秒頃

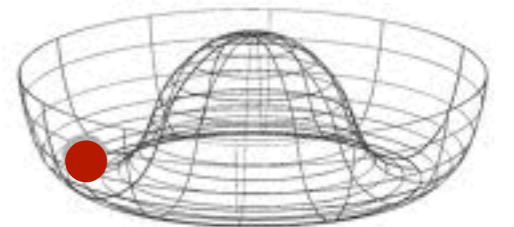
→電弱ゲージ対称性が自発的に破れ質量獲得

参考)水蒸気-水転移との類似

ゲージ対称



自発的破れ





# ヒッグス粒子：LHCで発見

全ての標準理論粒子発見

→ 全ての標準理論パラメータが確定

# 標準理論の不満点

- 物質-反物質非対称を説明不能。
- 暗黒物質(ダークマター)を説明不能。
- 3世代(質量の階層性)が説明不能。
- 強い相互作用のCP対称性を説明不能。
- 一般相対論と統合できていない。

# 標準理論を超える理論

- 超対称模型 (対称性を拡張)
- 余剰次元模型 (次元を拡張)
- 超弦理論 (上記を拡張した上, 弦を想定)
  1. 暗黒物質問題はそれぞれ対処
  2. 階層性問題もそれぞれクリア
  3. 物質・反物質非対称は模型依存

# 超対称模型

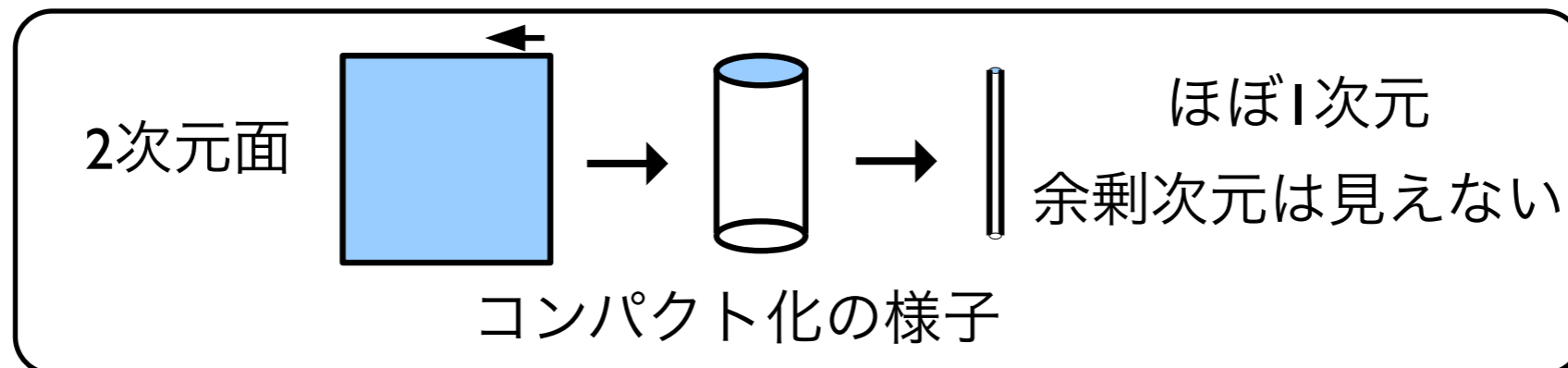
- ◆  $\sqrt{(\text{ローレンツ対称性} + \text{並進対称性})} = \text{超対称性}$
- ◆ ボゾン-フェルミオンを入れ替える対称性

- 標準理論粒子がパートナーを持つ  
→ **暗黒物質の候補**
- ヒッグス場に関する二次発散が相殺  
→ **階層性問題解決の候補**
- 3つの結合定数が  $10^{15}$  GeV で一致

# 余剰次元模型

- ◆ 宇宙が $(3+1) + 1$ 次元だとする
- ◆ 余分な次元(余剰次元)は丸まって見えない

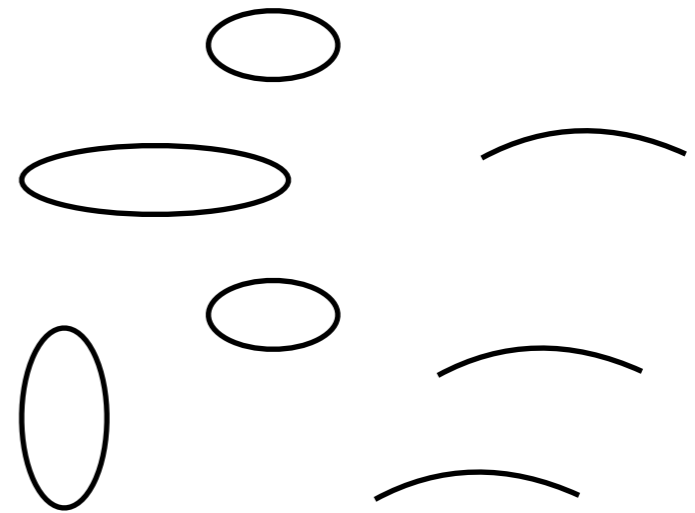
- 余剰次元方向のモード(KK mode)  
→ **暗黒物質の候補**
- 5次元では重力は強くて良い  
→ **階層性問題解決の候補**
- ヒッグス起源をゲージ場に帰着可能



# 超弦理論

- ◆ 粒子ではなくひもを基本とする理論
- ◆ 10次元の場合のみゲージ対称性を保てる

- 多数の中性粒子  
→ **暗黒物質の候補**
- 超対称性を含む多くの対称性  
→ **階層性問題解決**
- 重力子と呼ばれる閉弦を含む  
→ **重力理論との統合！**



統一理論の有力候補

**最もわくわくする素粒子物理学の時代に入っており、今後「数理科学の威力」がさらに発揮される！**