数理科学の魅力と威力
「見えないものの形を探る」

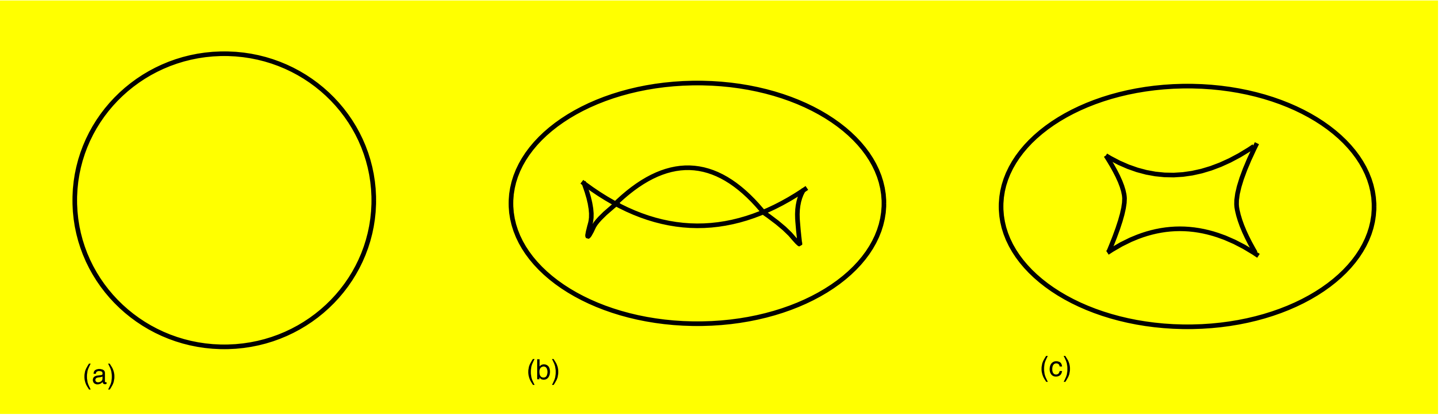
小林真人
秋田大学大学院　理工学研究科

November 10, 2017

見えないものの形を探る

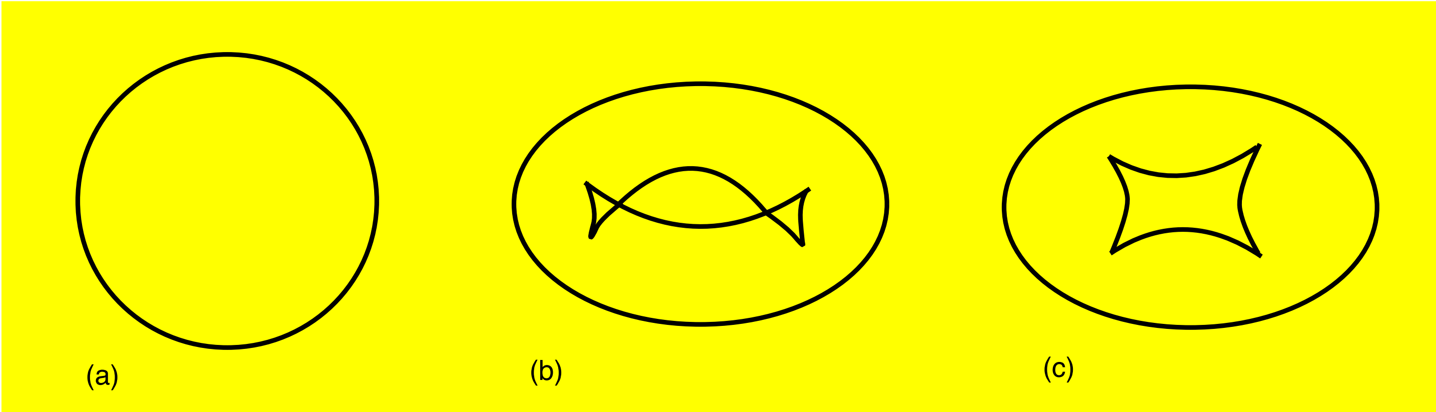
見えないものの形を探る (1/3)

つぎの絵は 4 次元のどんな物体を表しているか？



見えないものの形を探る (2/3)

つぎの絵は 4 次元のどんな物体を表しているか？



こたえ

(a) 4 次元球面 S^4

(b) 球面の積 $S^3 \times S^1$ または球面の捻れた積 $S^3 \tilde{\times} S^1$

(c) (b) または 球面の積 $S^2 \times S^2$ か 捻れた積 $S^2 \tilde{\times} S^2$

？？ と言われても $\cdots$

見えないものの形を探る (3/3)

直接見ることができない「高次元」の物体の形を探る
$\cdots$ といわれても

- 高次元 (n-次元) の「物体」とは？
- どんな道具や原理を使う？
- なぜ知りたいのか？

1 （目にみえるものを）見るとは (1/15)

形の観察例

bending tube (digestive tract)

red blood

pollen

mug

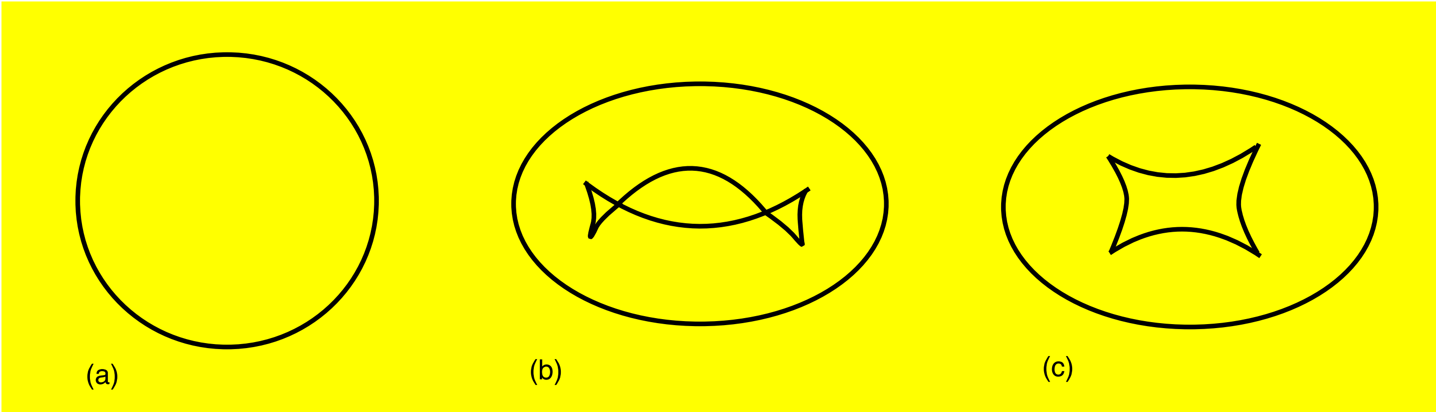
形を線でスケッチしてみよう

線によるスケッチから，どうして形が推測できるのだろうか？

← 素朴な疑問に立ち向かう

1 (目にみえるものを）見るとは (2/15)

つぎの絵は 2 次元のどんな物体を表しているか？　← 問題整理



ただし，ここでは

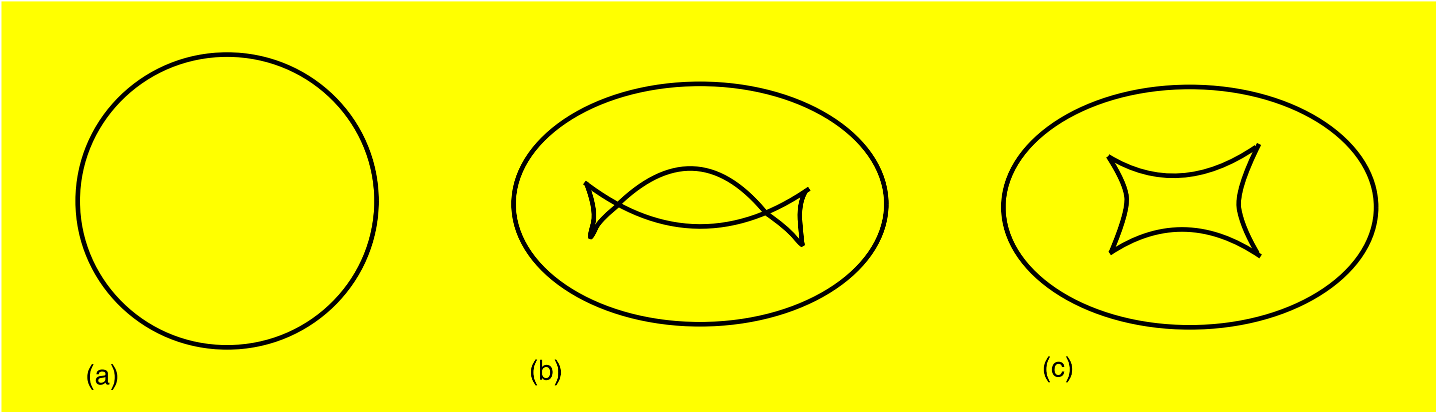
- どの構成点の周りも，曲がりを正せば円盤状である

という物体を考える

- 分岐しない，境界もない
- このような図形を 曲面 という
- 曲面 = surface = （なにかの）表面

1 (目にみえるものを）見るとは (3/15)

つぎの絵は 2 次元の どのような曲面を表しているか？



こたえ

(a) 球面 S^2 (2 次元球面, 2-球面)

(b) ドーナツの表面，1-球面の積 $S^1 \times S^1$ (トーラス= torus)

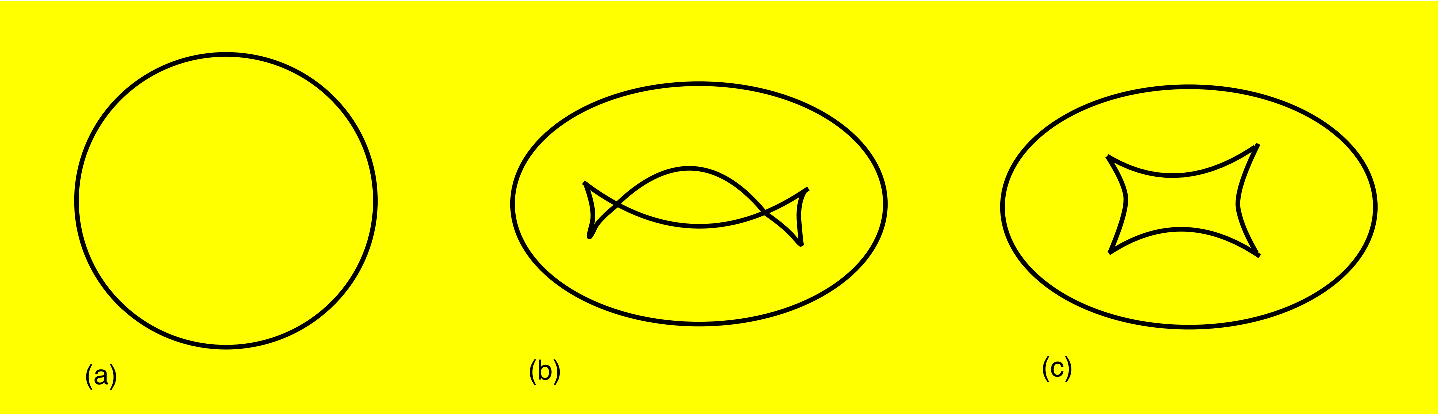
(または捻れた積 $S^1 \tilde{\times} S^1$ (クラインのつぼ))

(c) (b) と同じ

見えた？　(線の一部を隠したら？)

1 (目にみえるものを）見るとは (4/15)

そもそも，ここに描かれている線とは？

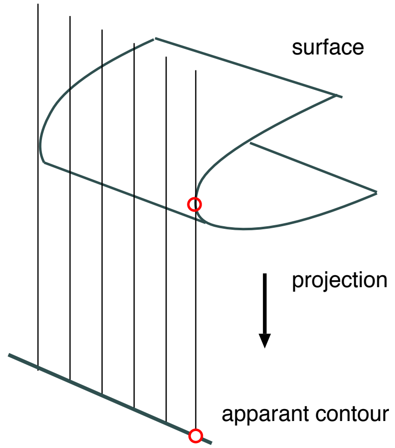


- これらの線は 輪郭線 とよばれる
- かたちを理解するときの手掛かり
- 輪郭線とはなんだろうか？

1 (目にみえるものを）見るとは (5/15)

輪郭線とは　← 定義を見い出す

定義　輪郭線とは，投影方向の直線と曲面の接点の像を連ねた線である



- 遮られて見えない部分も込めて輪郭線とよぶ　← 本質はなにか，判断
- 曲面が半透明な膜のときには，実際に観察される輪郭線と一致
- ひとは，網膜に映った輪郭線をもとにかたちを認識している

1 (目にみえるものを) 見るとは (6/15)

輪郭線の数理モデル　← モデルを見つける

モデル **1**　ある点のまわりで (= 局所的に) 曲面を座標平面と考えたとき,

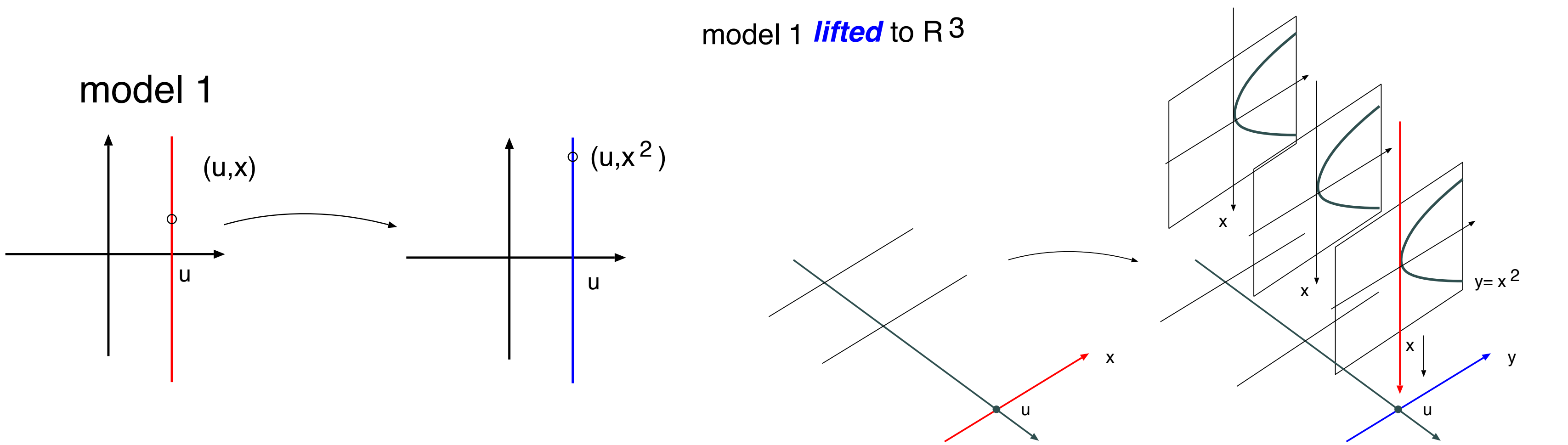
$$(u, x) \mapsto (u, x^2)$$

という対応 (=mapping) により輪郭線が生成される

この対応を図解すると ⋯

1 (目にみえるものを）見るとは (7/15)

モデル 1 の図解



- 「u が一定」という直線は位置を変えない
- その直線上の点は $x \to x^2$ という対応で移動
- これはちょうど放物線を使った対応

1 (目にみえるものを）見るとは (8/15)

輪郭線の数理モデル

モデル 2　ある点のまわりで (= 局所的に) 曲面を座標平面と考えたとき,

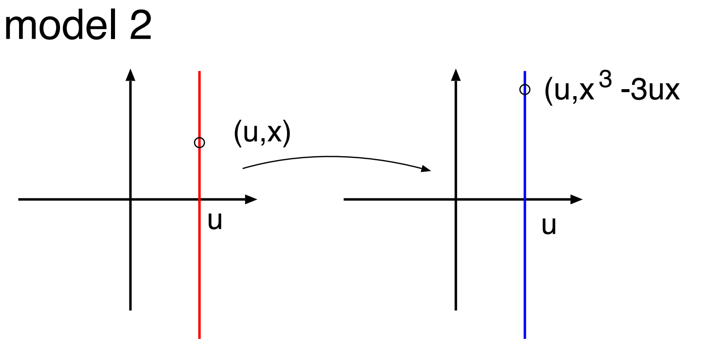
$$(u, x) \mapsto (u, x^3 + 3ux)$$

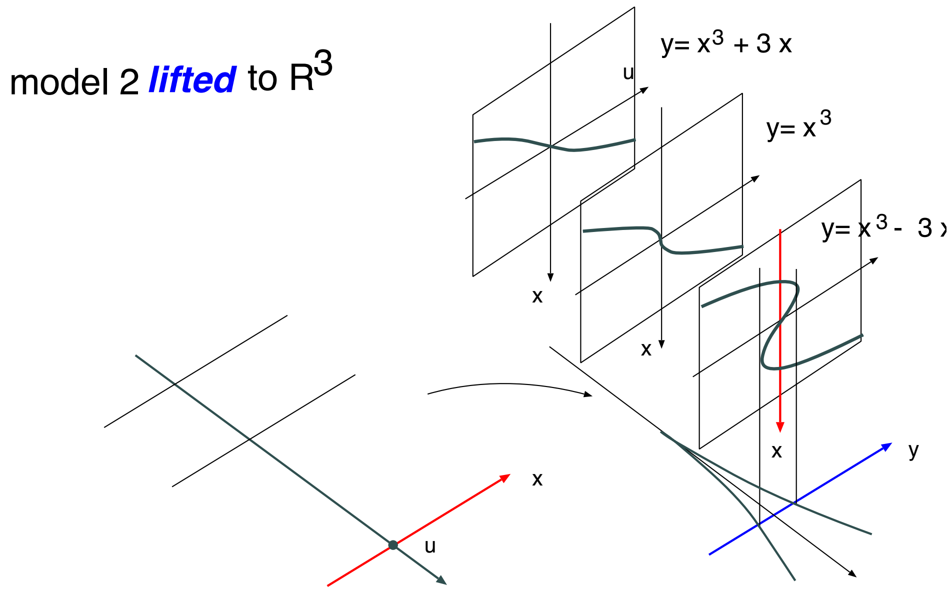
という対応 (=mapping) により輪郭線が生成される

この対応を図解すると ···

1 (目にみえるものを) 見るとは (9/15)

モデル 2 の図解





- 「u が一定」という直線は位置を変えない
- その直線上の点は $x \to x^3 + 3ux$ という対応で移動
- これはちょうど 3 次関数のグラフ (u によって形が変わる) を使った対応

1 (目にみえるものを) 見るとは (10/15)

ふたつの 輪郭線の生成モデル を見た

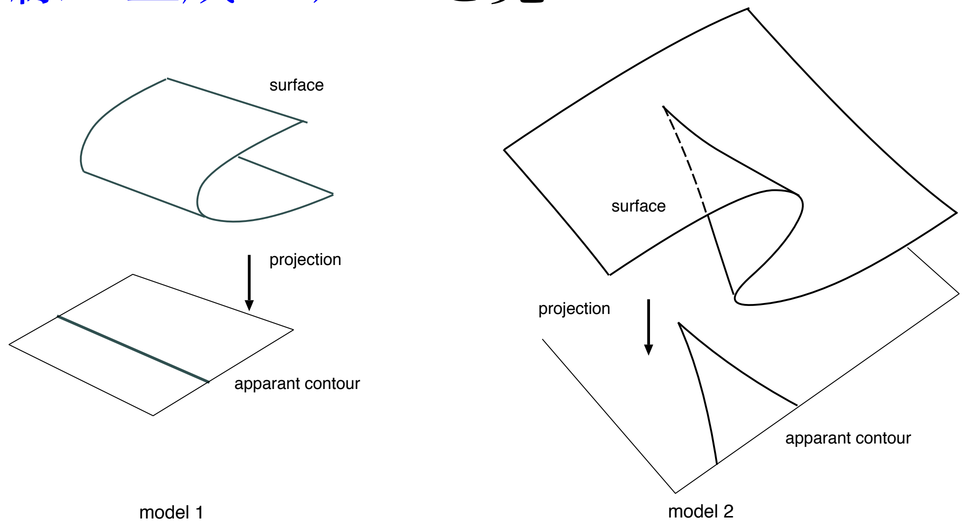
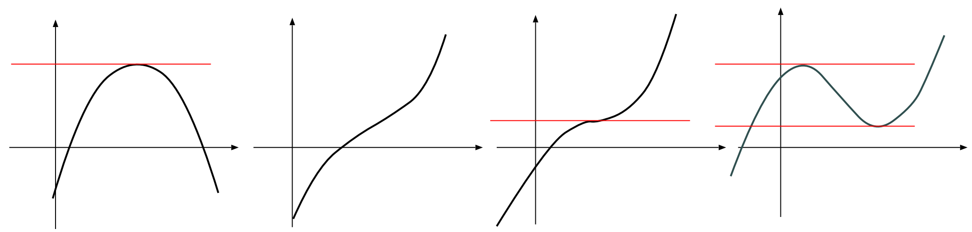


Figure: (u, x^2) 左と $(u, x^3 - 3ux)$ 右

輪郭線の発生（ものを見ること）には関数の水平な接線 (極大値, 極小値) が関係している　　$\leftarrow$ 新しい視点



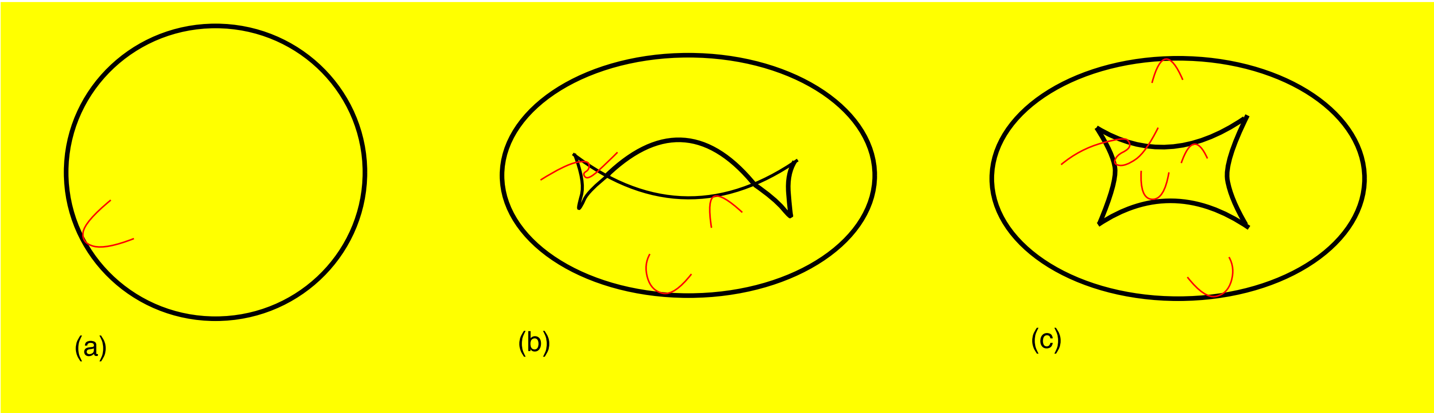
1 (目にみえるものを）見るとは (11/15)

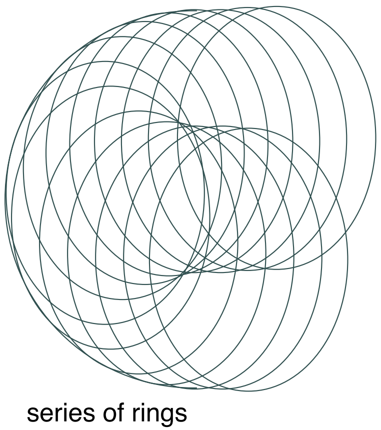
曲面を推測する原理

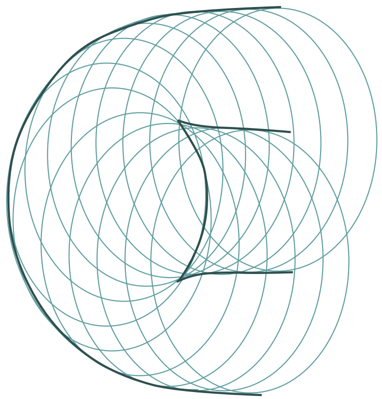
Whitney の定理（特殊な場合を除き）曲面の平面投影による輪郭線は, モデル *1* またはモデル *2* のどちらかにより生成される

1 (目にみえるものを）見るとは (12/15)

この原理により，図のスケッチがなぜ 2-球面をあらわすのか，トーラスをあらわすのか, 理解できる

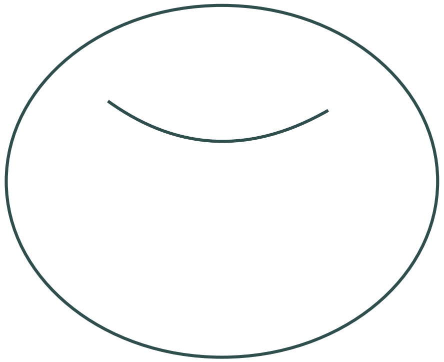




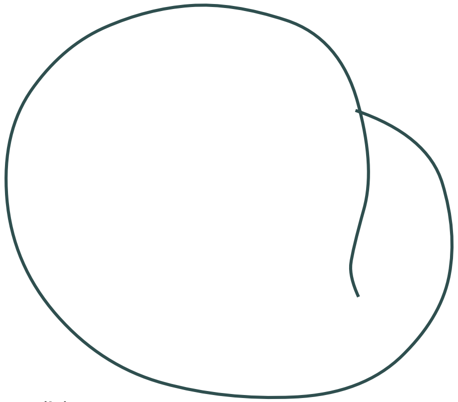


1 (目にみえるものを）見るとは (13/15)

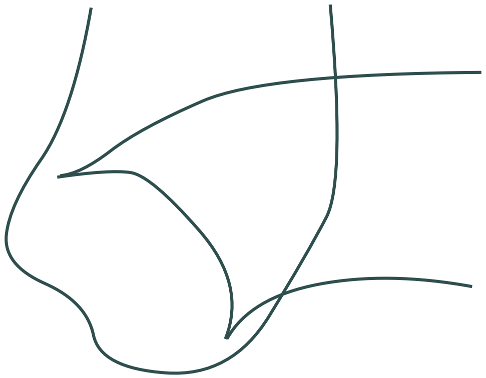
Quizz つぎのスケッチはどんなかたちの曲面を表しているか



(a)



(b)



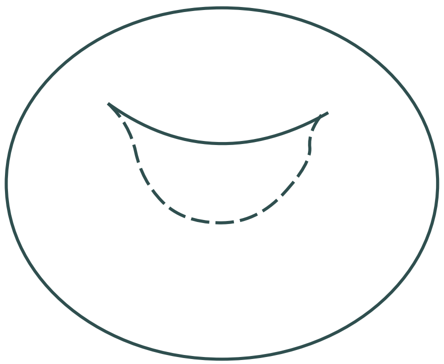
(c) a part of a surface

(d) a part of a surface

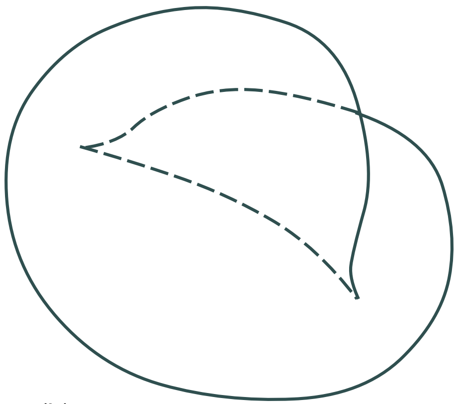
1 (目にみえるものを）見るとは (14/15)

(Quizz つぎのスケッチはどんなかたちの曲面を表しているか)
こたえ

(a) 図のように隠れている輪郭線を推測すれば,「白玉」のかたち（窪んだ球面）
(b) 図のように隠れている輪郭線を推測すれば，折りたたみ中のビーチボール状
(c) 折れ曲がったパイプ
(d) 折れ曲がったパイプ



(a)



(b)

1 (目にみえるものを）見るとは (15/15)

Quizz つぎのかたちを線でスケッチせよ（輪郭線をかけ)

8 の字型につながったチューブ，　ひょうたん，　（縁のある曲面）帽子

(第 2 講終了)

2 高次元の図形とは (1/5)

図形は多くの点の集まり

つぎのような点の集まりを n (次元)-多様体 という

- どの構成点の周りも，曲がりを正せば n-円盤状である

ただし

n-円盤 D^n : (n-disc)　　$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \leqq 1\}$

原点からの距離が 1 以下の点のあつまり ＝ 球体（ボール状）

- 分岐しない，境界もない
- どの点でも (= 局所的には)，まわりは n-次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のようにみえる
- 曲面 ＝ 2-多様体

2 高次元の図形とは (2/5)

もっとも次元が低い 3-多様体の例

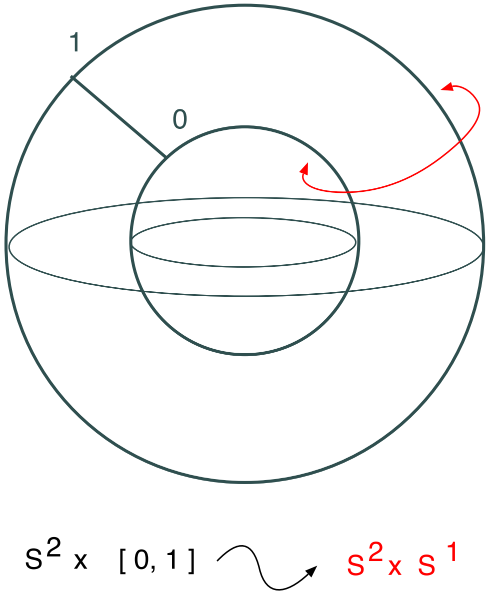
- 3-多様体では 各点のまわりは $D^3 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$, 中のつまったボール
- しかし，全体は 3-次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ には「住めない」
- 全貌を絵に描くことはできない

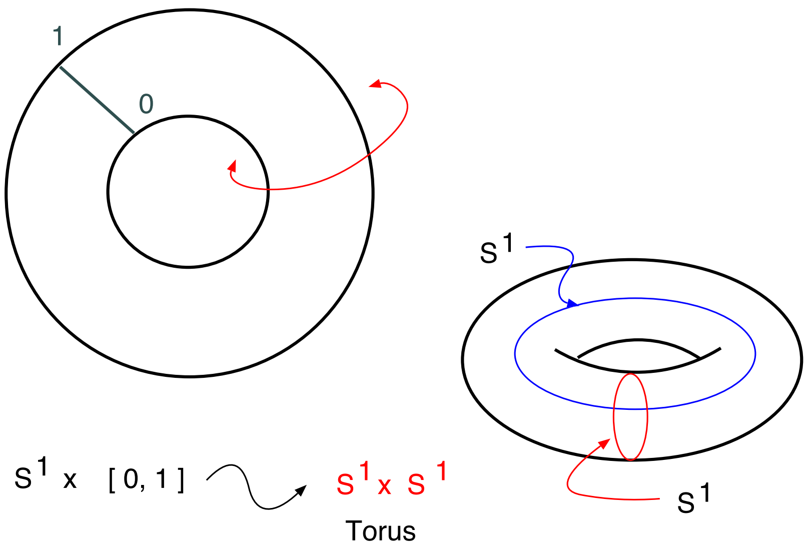
具体例を紹介すると $\cdots$

2 高次元の図形とは (3/5)

例：$S^2 \times S^1$　2 次元球面と円周（1 次元球面）の積

- S^1(円周) は 線分 $[0,1]$ の両端点を同じ点と考えた図形
- 積 $S^2 \times [0,1]$ は $\mathbb{R}^3$ に描ける (図のよう)
- この図のふたつの境界面が本当は貼り合わせてある，と考えた図形が $S^2 \times S^1$
- 作り方は, $S^1 \times S^1$ $(=$ トーラス$)$ と同じ　← 簡単な例の観察と類推

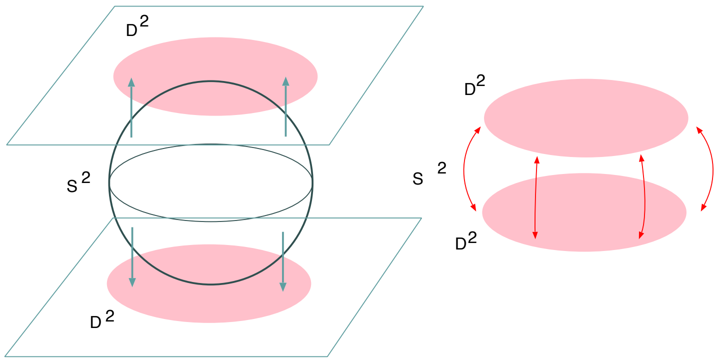


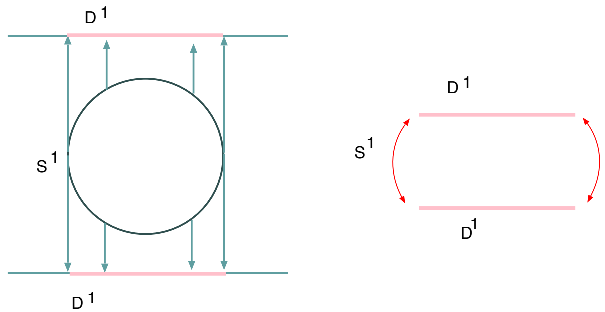


2 高次元の図形とは (4/5)

例：S^3　3 次元球面

- $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を満たす $\mathbb{R}^4$ の点が作る図形
- 2-球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ でも 1-球面 $x^2 + y^2 = 1$ でも，半球は曲がりを正せば円盤 (面積や長さの変化は気にしない)
- 2-球面も，3-球面も，円盤ふたつを境界で貼り合わせて得られる (曲り具合は，この際気にしない)　$\leftarrow$ 本質をとらえる

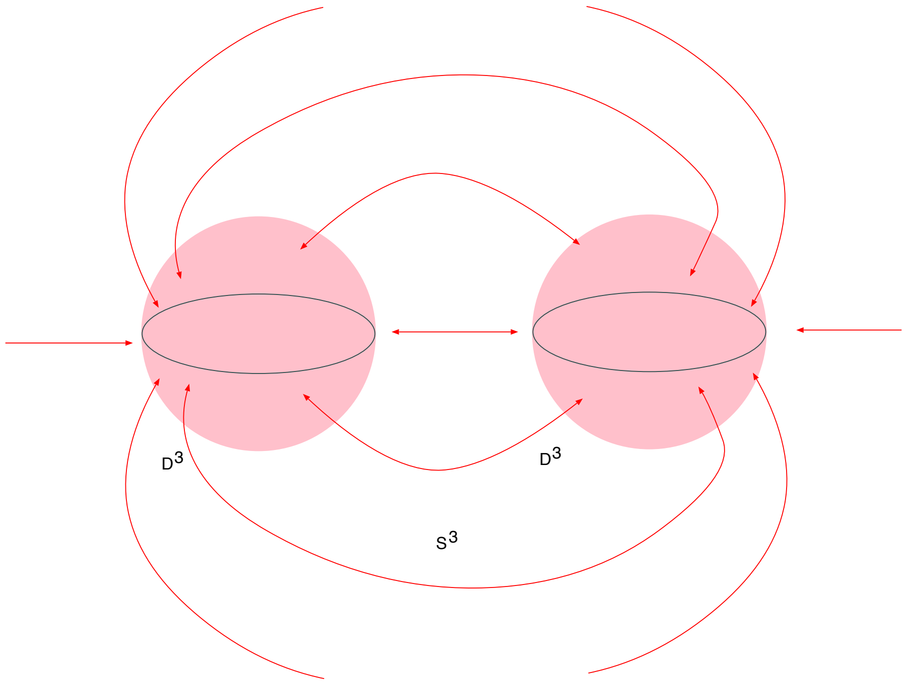




2 高次元の図形とは (5/5)

例： S^3 3 次元球面

- $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を満たす $\mathbb{R}^4$ の点が作る図形
- 3-球面の半球も，曲がりを正すと $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ (つまり D^3) となる (ことが証明できる) $\leftarrow$ 最後はきちんと証明
- 3-球面 S^3 は ふたつの D^3 の境界面を貼り合わせてできることがわかる

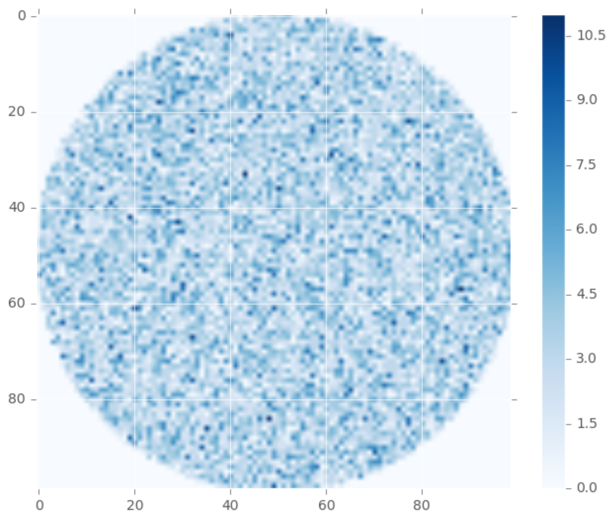


3 投影で探る (1/5)

n-多様体 ($n \geqq 3$) は，$\mathbb{R}^3$ には収まらない，全貌を見ることができない

- 平面に投影すれば 輪郭線からかたちが推測できないか

たとえば，S^n (n 次元球面：$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$)
平面へ投影 $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \to (x_0, x_1)$ をとることができる。



refer also to s3 point plot. html

3 投影で探る (2/5)

投影で n-多様体を探る根拠

Thom, Mather, *etc* の定理　　　（特殊な場合を除き）

n-多様体の平面投影による輪郭線は, モデル *1* またはモデル *2* のどちらかにより生成される*:*

モデル 1

$$(u, y_1, \cdots, z_1, \cdots) \to (u, y_1^2 + \cdots - z_1^2 - \cdots)$$

モデル 2

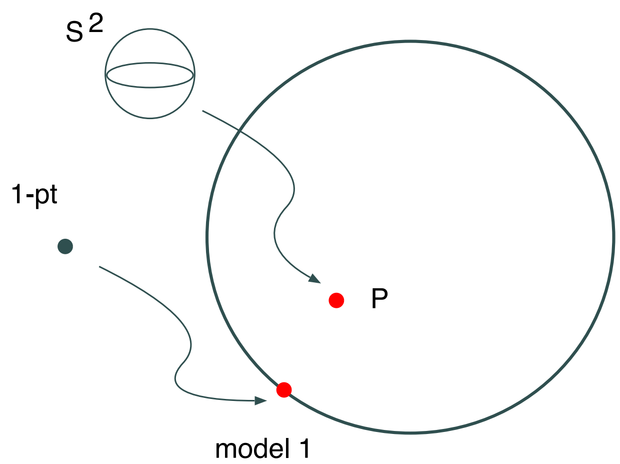
$$(u, x, y_1, \cdots, z_1, \cdots) \to (u, x^3 - 3ux + y_1^2 + \cdots - z_1^2 - \cdots)$$

3 投影で探る (3/5)

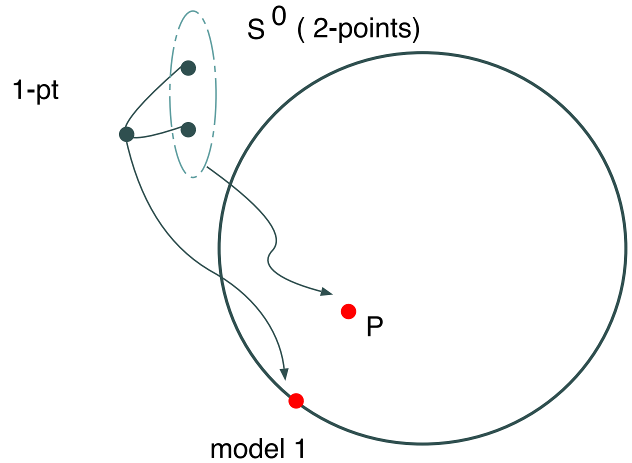
例：投影像からの 4-多様体の復元例

像の一点 P に投影される図形を P での ファイバー（繊維）という

- 輪郭線が円周のとき
- 輪郭線はモデル 1 で生成されている (しかも z 部分なし)
- 一点 P のファイバーは，P が輪郭線上でないとき S^2, P が輪郭線上のとき 一点　　← 計算してみよう
- P が輪郭に近づくにつれてファイバーが縮み，最後は一点に
- S^2 を投影したときと類似の状況
- 考察を重ねると, S^4 の投影であることがわかる (深い定理 $\Gamma_4 = 0$ より)



S^4



S^2

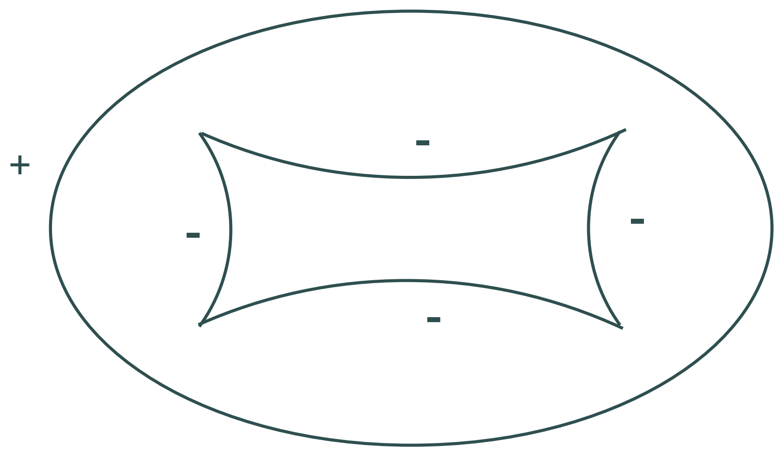
3 投影で探る (4/5)

例：投影像からの 4-多様体の復元例 2

- 輪郭線が図のとき（トーラスと同じ）
- 生成モデル 1，2 の両方が混在
- モデル 1 の輪郭線に種別 $+, -$ が設定できる：

$$
\begin{array}{ll}
+ & (u, y_1, y_2, y_3) \to (u, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\
- & (u, y_1, y_2, z) \to (u, y_1^2 + y_2^2 - z^2)
\end{array}
$$

- 図のように設定した場合を考える

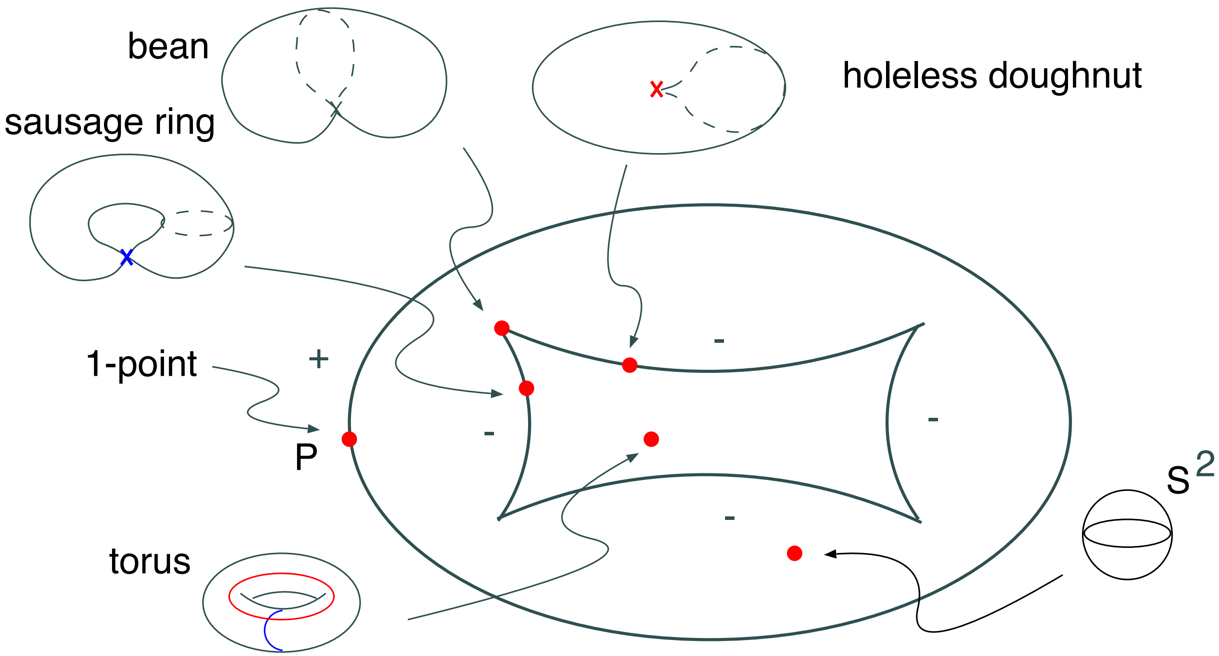


3 投影で探る (5/5)

投影像からの 4-多様体の復元例 2

- 一点 P のファイバーは，図のよう (2-球面，トーラス，穴なしドーナツ，豆，輪っかソーセージ)
- あれこれ調べると，$S^2 \times S^2$ (または捻れ積 $S^2 \tilde{\times} S^2$ のどちらか) であることがわかる　　　(冒頭の問いのこたえ)
- ファイバーの変化の様子は，実はトーラスの投影と類似

  ← どう類似?



4 なぜ高次元を調べる (1/2)

高次元のかたちをしらべるのは $\cdots$

- n 次元にはどれくらい多様な形（多様体）があるか知りたい

  ← 真理の探究

- 観測データは，高次元空間のなかの点

  気象データの例　（位置，気温，気圧，湿度，風向，風速，$\cdots$ ） $\in \mathbb{R}^7, \mathbb{R}^8, \cdots$

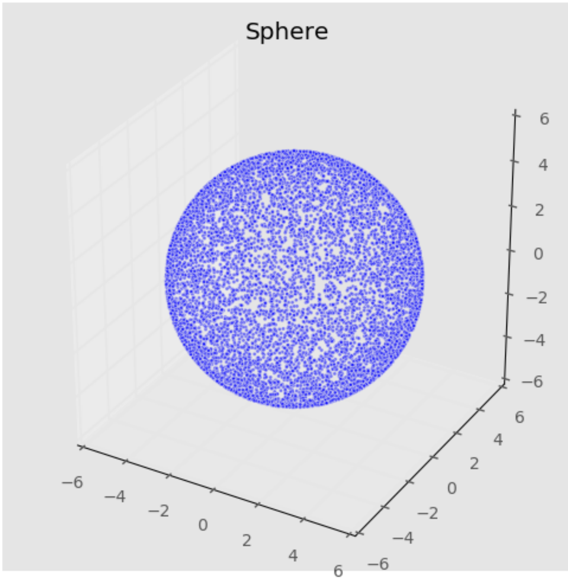
- 観測データは，高次元空間に雲のように分布
- 「くぼみ」「たわみ」が見つかれば，データの傾向の把握に有効
- 今後の変化の様子を観測，予測できるようになる

  ← 実社会に貢献

4 なぜ高次元を調べる (2/2)

擬似的な例の紹介
3 次元空間に分布する 2-球面状，トーラス状分布の投影
分布の形を知らなかったとして，投影からかたちが推測できる

`Sphere png , Torus point plot html`



おつかれさま!!

数理科学の魅力と威力

- 数理科学分野では 分かっていることことは, ほんの僅か (教科書には分かったことしか載っていないが)
- 数理のサイクル

  観察 → 鍵の発見 → 一般化　(ほんとうに大切なのはどの部分か)　→正しさの保証　(証明)

- これを体験した人材は, 広い分野で「信頼」を勝ち得る　(多量のデータが取れるようになったが, 自信=責任 をもってデータ解析できるひとは希少)

数理科学の魅力と威力

数理科学は これから の分野
これを学んで
新しいアイディアを生み出せる・
頼れる 人材
を目指しませんか？

同時配布物：コース誌「インテグラル」
コースのホームページ：http://mathsci.math.akita-u.ac.jp
連絡先
今回の担当者：(物理)　三角 misumi@phys.akita-u.ac.jp
(数学)　小林 mahito@math.akita-u.ac.jp

コースへの連絡：mathsci@math.akita-u.ac.jp